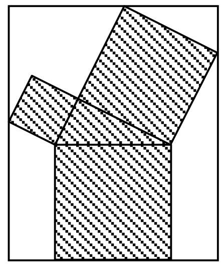
LI OME – Comunidad de Madrid

Segunda prueba. Jueves 18 de diciembre de 2014.

1. Al quitar un número de una lista de diez enteros consecutivos resulta que la suma de los nueve restantes es 2014. ¿Qué número hemos quitado?

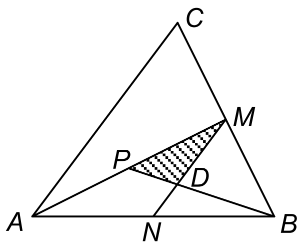
2. En una reunión hay varias personas. Se incorpora Alicia y la media de la edad aumenta en 4 años. Posteriormente se incorpora Beatriz, que es gemela de Alicia, y la media de edad vuelve a aumentar, pero en este caso solo en 3 años. ¿Cuántas personas había en la reunión antes de entrar Alicia?

3. Sobre los lados de un triángulo rectángulo, de catetos uno doble que el otro, dibujamos cuadrados hacia fuera, como se muestra en la figura. El polígono obtenido lo inscribimos en un rectángulo como puede observarse en la citada figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del polígono rayado y el área del rectángulo en el que está inscrito?



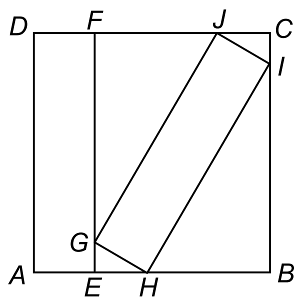
4. La gráfica de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

5. En el triángulo *ABC*, de área 48, *P* es el punto medio de la mediana *AM* y *N* el punto medio del lado *AB*. ¿Cuál es el área del triángulo *MDP*?



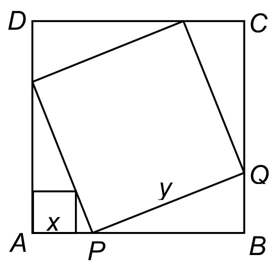
6. Una caja contiene varias bolas, todas iguales. El cociente entre el volumen ocupado por las bolas y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k}$, con *k* entero mayor que 1.
   Sacamos de la caja un número primo de bolas y ahora el cociente entre el volumen ocupado por las restantes y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k^2}$. ¿Cuántas bolas había en la caja al principio?

7. En el interior del cuadrado *ABCD*, de lado 1, dibujamos dos rectángulos iguales, *AEFD* y *GHIJ*. ¿Cuánto mide el segmento *AE*?



8. Uno de los lados de un triángulo mide 10 cm y la mediana que llega a ese lado, que mide 9 cm, es perpendicular a una segunda mediana del triángulo. Calcula la longitud de la tercera mediana del triángulo.

9. En el cuadrado *ABCD* de lado 1 se inscribe un cuadrado de lado *PQ* = *y*, como muestra la figura, y en uno de los triángulos rectángulos determinado por los dos cuadrados se inscribe otro cuadrado de lado *x*. Al moverse el punto *P* sobre el lado *AB* cambian los valores de *x* e *y*. Determina *x* e *y* para que $x^2 + y^2$ sea mínimo. ¿Cuánto vale ese mínimo?

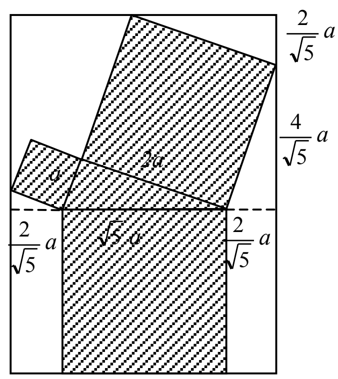


10. En el triángulo *ABC* cuyos ángulos verifican $\hat{A} < \hat{C} < 90° < \hat{B}$ se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Los segmentos de estas bisectrices, cada uno hasta la prolongación del lado opuesto, miden lo mismo que el lado *AB*. Calcula la medida del ángulo $\hat{A}$.

1. Llamando a, $a+1$, …, $a+9$ a los enteros, tenemos que $a+(a+1)+...+(a+9)-(a+k)=2014$ siendo $0\le k\le 9$, entero. Así pues $9a+45-k=2014$, $9a=1969+k$, $k=2$, de donde $a=219$ y el número que hemos quitado es el $\boxed{221}$.

2. Siendo n el número inicial de personas y $\bar{x}$ la media de sus edades, tenemos que $n\bar{x}+a=(n+1)\cdot(\bar{x}+4)$ donde a es la edad de Alicia. También $n\bar{x}+2a=(n+2)\cdot(\bar{x}+7)$. De estas ecuaciones obtenemos $\begin{cases} a=4n+\bar{x}+4 \\ 2a=7n+2\bar{x}+14 \end{cases}$, con lo que restando a la segunda el doble de la primera, sale $\boxed{n=6}$

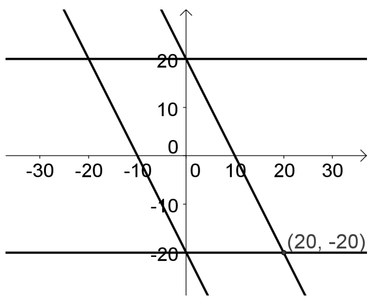
3. Llamando a y $2a$ a los catetos del triángulo dado, la semejanza de triángulos que aparecen en la figura nos permite nombrar las diversas longitudes como lo hemos hecho. Así pues, el área del polígono rayado es $5a^2+a^2+a^2+4a^2=11a^2$ y el área del rectángulo exterior es $a^2\left(\sqrt{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)=a^2\cdot\frac{99}{5}$ por lo que el cociente pedido es $\frac{11}{\frac{99}{5}}=\boxed{\frac{5}{9}}$



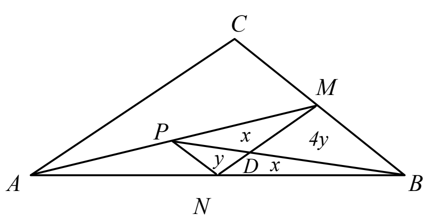
4. Si $x\ge 0$, la función es $y^2+2xy+40x=400$, es decir, $y^2-400=-2x(y+20)$ que es equivalente a $(y+20)\cdot(y-20+2x)=0$, que responde a las rectas $\begin{cases} y=-20 \\ y=-2x+20 \end{cases}$.

Si $x<0$, tendríamos $y^2+2xy-40x=400$; $y^2-400=-2x(y-20)$; $(y-20)(y+20+2x)=0$ que da lugar a las rectas $\begin{cases} y=20 \\ y=-2x-20 \end{cases}$.

Así pues, la gráfica de nuestra función es la representada al lado y la región acotada que determina es el paralelogramo de base 20 y altura 40 cuya área es $\boxed{800}$



5. Al ser P y N puntos medios de los segmentos AM y AB respectivamente, $PMNB$ es un trapecio en el que la base PN es la mitad de la MB. Por otra parte, $(AMB)=24$ por lo que $(APN)=6$ con lo que $(PMNB)=18$. Finalmente, la semejanza de los triángulos PND y MBD y el hecho de que $(PNB)=(PNM)$ nos permite llamar x e y a las áreas que hemos llamado, de donde $\begin{cases} 2x+5y=18 \\ x+y=6 \end{cases}$, con lo que $\boxed{x=4}$

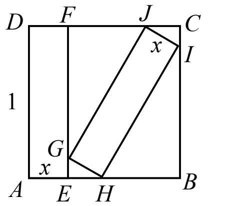


6. Definidas las variables de la siguiente forma. Volumen de la caja: V; número original de bolas: n; volumen de cada bola V_b ; número de bolas que sacamos p, siendo p primo.

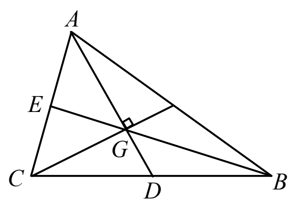
$\dfrac{n\cdot V_b}{V-nV_b}=\dfrac{1}{k}$; $\dfrac{(n-p)V_b}{V-(n-p)V_b}=\dfrac{1}{k^2}$. Escribamos n en términos de p y k: $\begin{cases} knV_b=V-nV_b \\ k^2nV_b-k^2pV_b=V-nV_b+pV_b \end{cases}$. Restando y dividiendo por V_b, tenemos $kn-k^2n+k^2p=-p$; $n=\dfrac{p(k^2+1)}{k^2-k}=\dfrac{p(k^2+1)}{k(k-1)}$. Así pues, k divide a $p(k^2+1)$, pero k y k^2+1 son primos entre sí, luego k divide a p y como $k>1$, sigue que $k=p$. Tenemos, pues, $n=\dfrac{p^2+1}{p-1}=p+1+\dfrac{2}{p-1}$. Al ser n entero, $p-1$ divide a 2, luego $p=2$ ó 3. En cualquier caso, $\boxed{n=5}$

7. Sea $x=AE=IJ$ y $\alpha=C\hat{J}I$, $sen\ \alpha=\dfrac{CI}{x}$; $x\cdot sen\ \alpha=CI=1-IB$, como $IH=AD=1$, sigue que $cos\ \alpha=IB$, por lo que $x\cdot sen\ \alpha=1-\cos\ \alpha$, $x=\dfrac{1-\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$. Por otra parte, $AE+EH+HB=1$, es decir: $x+x\cdot\cos\ \alpha+sen\ \alpha=1$, de donde sustituyendo x tenemos una ecuación en $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$: $\dfrac{1-\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}+\dfrac{1-\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}\cos\ \alpha+sen\ \alpha=1$; es decir, $\dfrac{1-\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}(1+\cos\ \alpha)+sen\ \alpha=1$;

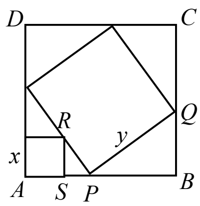
$2sen\ \alpha=1$,entonces $\alpha=30^{\circ}$; por tanto, $cos\ \alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\boxed{2-\sqrt{3}}$



8. $BC=10$, $AD=9$. Como G es el baricentro, $AG=6$ y $GD=3$ y al ser $CD=5$ y el triángulo CGD rectángulo, es $CG=4$. Nos piden BE. En el triángulo rectángulo AGC, de catetos 6 y 4, $AC=2\sqrt{13}$. Finalmente, como EG es mediana a la hipotenusa AC del triángulo rectángulo AGC, su longitud es la mitad de la hipotenusa, o sea, $\sqrt{13}$ y $GB=2\sqrt{13}$, así pues $\boxed{BE=3\sqrt{13}}$



9. Los triángulos rectángulos PQB y PRS son semejantes por lo que $\dfrac{x}{1-x-PB}=\dfrac{PB}{1-PB}$; $PB-PB^2=x$. Por otra parte, $PB^2+(1-PB)^2=y^2$, o sea: $y^2=2PB^2-2PB+1$, es decir, $y^2=1-2x$, con lo que debemos hacer mínimo x^2+1-2x. Como $x=PB-PB^2$ y $0\le PB\le 1$, llamando $PB=t$, es $x=t-t^2$ por lo que $x\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$. Así pues, $x^2+1-2x=(x-1)^2$ alcanza el mínimo si $x=\dfrac{1}{4}$ y vale $\boxed{\dfrac{9}{16}}$



10. Nos dicen que los triángulos APB y ABQ son isósceles con $AP=AB=BQ$ por lo que podemos llamar α y β como en la figura. $\beta=2\cdot D\hat{B}Q=2\cdot 2\alpha$. Así, en el triángulo APB, $\hat{A}=180^{\circ}-8\alpha$, por tanto, $180^{\circ}-8\alpha+\dfrac{\alpha}{2}=90^{\circ}$; $\boxed{\alpha=12^{\circ}}$