El filtro de Hodrick-Prescott

Sea x_t la serie temporal que se va a filtrar. Sean c_t y τ_t el componente cíclico y el componente tendencial en que vamos a descomponer la serie temporal x_t. La forma en que se lleva a cabo tal descomposición es la siguiente:

$$\underset{\{c_t\,,\,\tau_t\}}{Min} \sum_{t=1}^{T} c_t^2 + \lambda \sum_{t=3}^{T} \left(\nabla^2 \tau_t\right)^2$$

sujeto a: $x_t = c_t + \tau_t$

donde $\nabla \equiv 1 - B$, y B es el operador retardo: $Bx_t = x_{t-1}$

La elección del parámetro $\lambda>0$ condiciona la suavidad de la tendencia extraída de la serie temporal x_t . De forma que cuanto mayor sea λ más suave será la tendencia (en el límite, cuando $\lambda \to \infty$ se tiene que la tendencia es lineal).

Teniendo en cuenta que tomar dos diferencias sobre una variable implica transformar la variable tendencia de esta forma: $\nabla^2 \tau_t = \tau_t - 2\tau_{t-1} + \tau_{t-2}$, lo cual equivale, en términos matriciales, a transformar el vector de datos temporales τ premultiplicándolo por una matriz K (de tamaño $T \times (T-2)$)que tiene la siguiente forma:

$$K_{T\times(T-2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, podemos escribir el problema de optimización descrito arriba en forma matricial como sigue:

$$\underset{\{\tau\}}{Min}\ (x-\tau)'(x-\tau)+\lambda\tau' K' K\tau,$$

cuya condición de primer orden nos conduce a cómo ha de transformarse el vector temporal x para obtener el componente tendencial:

$$\tau=\left(I_T+\lambda K' K\right)^{-1}x.$$

Una vez obtenido el componente tendencial, el componente cíclico se obtiene residualmente: $c=x-\tau$.