Colección de ejercicios resueltos: Variable Compleja y Análisis Funcional

Propuestos por Fernando Bombal Gordón
Redactados por Álvaro Sánchez González

Ejercicio 1 *Estúdiese en qué puntos de $\mathbb{C}$ la siguiente función es $\mathbb{R}$-diferenciable, en cuáles se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, en cuáles es $\mathbb{C}$-diferenciable y si es holomorfa en algún abierto, calculando la derivada en los puntos en que ésta exista:*

$h(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *y* 0 *en otro caso.*

Solución. En primer lugar, podemos identificar el plano complejo $\mathbb{C}$ con el plano real de dos dimensiones $\mathbb{R}^2$ de una forma natural mediante la aplicación que a cada par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le asocia $x + iy \in \mathbb{C}$. Haciendo esta identificación, podemos interpretar una función de una variable compleja en términos de dos funciones reales de dos variables reales. Es decir, identificando $z = x+iy$ con (x,y) podemos entender una función $f(z)$ como $u(x,y)+iv(x,y)$. Las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reciben el nombre de parte (o componente) real e imaginaria respectivamente de la función f.

Sabemos que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}$-diferenciable si lo son ambas componentes, y será $\mathbb{C}$-diferenciable si y sólo si, además, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. En este caso el valor de la derivada en un punto viene dado por:

$$\begin{aligned} f'(z) =& \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \\ =& \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Estudiemos qué ocurre con la función $h(z)$. Sean $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

luego las derivadas parciales existen y son continuas (en todo punto salvo en 0), con lo que h es una función $\mathbb{R}$-diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Además se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

luego h es una función $\mathbb{C}$-diferenciable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Justifiquemos la afirmación realizada de que la función no es siquiera $\mathbb{R}$-diferenciable en $(0,0)$. En este caso tendríamos que los límites

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}, \\ \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h^2}, \end{aligned}$$

no existen y por tanto la función no es $\mathbb{R}$-diferenciable y como consecuencia tampoco es $\mathbb{C}$-diferenciable.

En el caso en el que la función cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, sabemos que existe la derivada y su valor es

$$f'(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

De hecho, si $z = x+iy$, se tiene que $h(z) = \bar{z}/|z|^2$ y por las reglas conocidas de derivación se obtiene que

$$h'(z) = \frac{-1}{z^2} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

De aquí se deduce inmediatamente que la función h es diferenciable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y no es ni siquiera continua en 0. $\square$

Ejercicio 2 *Calcúlese $\int_\gamma f(z)dz$ en los siguientes casos:*

a) $f(z) = \bar{z}$ *con γ la circunferencia de centro* 0 *y radio* 2 *positivamente orientada;*

b) $f(z) = \Re z$ *con γ la semicircunferencia unitaria que pasa por $-i, 1, i$ en ese orden;*

c) $f(z) = \frac{1}{z}$ *con γ la poligonal que une los puntos $1, -i, -1, i$ en ese orden.*

Solución. Utilizaremos aquí las integrales sobre caminos parametrizados por una curva:

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino parametrizado y $f(z)$ un función compleja continua sobre la trayectoria del camino, tenemos que la integral de la función f a lo largo del camino γ es

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Por tanto, basta con parametrizar los caminos que se proponen. En el caso a), una parametrización es $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, y por tanto

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}2ie^{it}dt = 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i.$$

En el supuesto b) tenemos la parametrización $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ y puesto que

$$\Re(e^{it}) = \Re(\cos t + i \sin t) = \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

obtenemos que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} ie^{it} = i\pi/2.$$

El caso c) se trata de forma ligeramente distinta a los dos anteriores. En primer lugar, debemos escoger un corte de rama del plano complejo de manera que la poligonal γ quede en el complementario de dicho corte. Consideramos r la semirecta con origen en 0 y que forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje real. En $\mathbb{C} \setminus r$, la función $f = 1/z$ tiene una primitiva que es $l(z) = log|z| + i\theta$, siendo $z = |z|e^{i\theta}$ con $\pi/4 < \theta < \pi/4 + 2\pi$. Así tendremos que

$$\int_\gamma f = l(i) - l(1) = (0 + i\pi/2) - (0 + 2\pi i) = 3\pi i/2.$$

□

Ejercicio 3 *Demuéstrese que la función* $f(z) := \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *no posee una primitiva holomorfa en ningún entorno abierto de la circunferencia unidad.*

Solución. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una función $F(z)$ primitiva de la función $f(z) = 1/z$ en algún entorno abierto de la circunferencia unidad. En ese caso, podemos considerar la integral de $f(z)$ a lo largo de la circunferencia unidad $C(0,1)$, que es un camino cerrado y por tanto $\int_{C(0,1)} f(z)dz = 0$.

Sin embargo, si parametrizamos $C(0,1)$ por $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, obtenemos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i,$$

lo cual nos lleva a contradicción. □

Ejercicio 4 *Sea* f *una función holomorfa en un dominio* $G \subset \mathbb{C}$. *Pruébese que bajo alguna de las dos siguientes condiciones, la función* f *es constante.*

a) $\Re f =$*cte;*

b) $|f| =$*cte.*

Solución. Denotemos, como habitualmente, $\Re f = u$ y $\Im f = v$. Puesto que $f \in \mathcal{H}(G)$, se tiene que f es $\mathbb{C}$-diferenciable y por tanto cumple las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En el primero de los casos, u es constante y así se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, luego $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Por tanto v también es constante y como consecuencia $f = u + iv$ es constante.

En el segundo supuesto, la hipótesis nos dice que $u^2 + v^2$ es constante, sea esta constante $A \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Si $A = 0$, no hay nada que probar, pues sería $u = v = 0$ y por tanto $f = 0$ constante.

Supongamos entonces que $A \neq 0$. Derivando, podemos formar el siguiente sistema donde las incógnitas son las derivadas parciales:

$$\left.\begin{array}{l} 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$$

Puesto que se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right\}$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = A \neq 0$$

por el teorema de Rouché, el sistema tiene solución trivial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

con lo que $\Re f$ es constante, y del caso anterior se deduce que f es constante. □

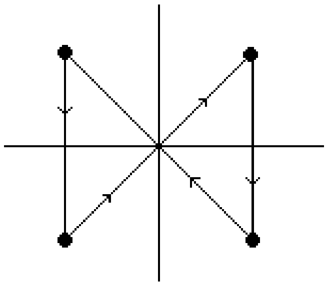
Ejercicio 5 *Sea γ el camino cerrado formado por la poligonal formada por los segmentos que unen los puntos $-1-i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ en este orden. Calcúlese los valores que toma la función* $\mathrm{Ind}(\gamma, \cdot)$ en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. ¿Es γ simplemente cerrado?

Solución. Realizando un dibujo de la situación que se plantea y orientando el camino de la forma correcta, podemos dividir el plano complejo (menos la traza del camino γ) en tres componentes conexas. Llamemos I al interior del triángulo formado en la región de la parte real negativa, II al interior del triángulo en la parte real positiva y III a $\mathbb{C} \setminus \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \gamma^*$.

El índice es constantemente nulo en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ con lo que $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$, $\forall z \in \mathrm{III}$.

Además, podemos ver el camino γ como concatenación de dos caminos γ_1 y γ_2, siendo éstos los que tienen por traza al triángulo que limita la región I y al triángulo que limita la región II respectivamente. Aplicando las propiedades del índice, se tiene que $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \mathrm{Ind}(\gamma_1 + \gamma_2, z) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, z) + \mathrm{Ind}(\gamma_2, z)$. Si estamos en la zona I, tendremos que $\mathrm{Ind}(\gamma_2, z) = 0$ por estar en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_2^*$ y $\mathrm{Ind}(\gamma_1, z) = 1$. Análogamente, si estamos en la región II, se tiene que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, z) = 0$ y que $\mathrm{Ind}(\gamma_2, z) = 1$.

Por tanto, se tiene entonces que $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1$, $\forall z \in \mathrm{I}$, que $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = -1$, $\forall z \in \mathrm{II}$ □



Ejercicio 6 *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y $f \in \mathcal{H}(G)$ sin ceros en G. Una función $F \in \mathcal{H}(G)$ se llama un logaritmo de f si $e^{F(z)} = f(z)$, $\forall z \in G$. Pruébese que son equivalentes:*

a) G es simplemente conexo.

b) Si $f \in \mathcal{H}(G)$ no tiene ceros en G, la función $\frac{f'}{f}$ posee una primitiva en G.

c) Toda $f \in \mathcal{H}(G)$ sin ceros en G posee un logaritmo en G.

d) Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus G$ existe un logaritmo holomorfo de $z - a$.

Solución. Comprobemos la cadena de implicaciones $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b$: Si G es simplemente conexo, entonces $\gamma \sim 0(G)$ para cualquier camino γ en G. En particular, como $g = \frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$, entonces $\int_\gamma g = 0$ para todo camino cerrado en G, luego g tiene una primitiva en G.

$b \Rightarrow c$: Podemos suponer G conexo. En caso contrario, repetiríamos el argumento para cada componente conexa de G. Sea $f \in \mathcal{H}(G)$ sin ceros en G entonces pro hipótesis existe $h(z)$ una primitiva de la función $g = \frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$ es decir, $h'(z) = g(z)$.

Hacemos aquí la siguiente observación: Si una función f tiene un logaritmo F, debe ser $e^{F(z)} = f(z)$ y por tanto $e^{F(z)}F'(z) = f'(z)$ y como consecuencia $F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Aplicando esto a nuestro caso en particular, debemos comprobar si $e^{h(z)} = f(z)$ de donde $e^{-h(z)}f(z) = 1$.

Sea $j(z) = e^{-h(z)}f(z)$. Entonces

$$j'(z) = f'(z)e^{-h(z)} - f(z)e^{-h(z)}h'(z) = f'(z)e^{-h(z)} - f(z)e^{-h(z)}\frac{f'(z)}{f(z)} = 0.$$

Por tanto, al ser G conexo, la función $j(z)$ es constante. Será $j(z) = a \neq 0$ y en consecuencia existirá un $b \in \mathbb{C}$ tal que $a = e^b$, con lo que $e^b = e^{-h(z)}f(z)$ y tendremos $f(z) = e^b e^{h(z)} = e^{h(z)+b}$ con lo que $h(z) + b$ es un logaritmo de f.

$c \Rightarrow d$: Consideremos la función $g : G \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z - a$. Tenemos que $z \in G$ y que $a \in \mathbb{C} \setminus G$ y por tanto $g(z) \neq 0$ para cualquier $z \in G$. Además, es claro que $g \in \mathcal{H}(G)$ y por tanto, utilizando la hipótesis, g tiene un logaritmo holomorfo en G.

$d \Rightarrow a$: Debemos comprobar que todo camino γ cerrado en G es homólogo a 0 en G, esto es, si se tiene que $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$ para cualquier punto $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Para ello sabemos que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Además, por hipótesis, tenemos que existe $F(z)$ logaritmo de $g(z) = z - a$, luego $e^{F(z)} = z - a$. Por tanto:

$$F'(z) = g'(z)e^{-F(z)} = e^{-F(z)} = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z - a}.$$

De esta forma tenemos lo que buscábamos:

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F'(\zeta) d\zeta = 0.$$

□

Ejercicio 7 a) *Pruébese directamente que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) *Calcúlese*

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sin \zeta}$$

donde $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$, *siendo* γ_1 *el borde orientado positivamente del cuadrado de centro* 0 *y lados de longitud dos, considerado con origen y final en el punto* $P = -\frac{1}{2} + i$ *y* γ_2 *el borde orientado positivamente del rectángulo de vértices* $\pm\frac{1}{2} \pm 2i$, *considerado también con origen y final en* P.

Solución.

a) Por definición de $\sin x$ tenemos:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big[\frac{e^{ix} - 1}{x} + \frac{1 - e^{-ix}}{x}\Big]$$

Haciendo en esta expresión $x \to 0$ obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2i}\Big[\frac{e^{ix} - 1}{x} + \frac{1 - e^{-ix}}{x}\Big] = \frac{1}{2i} 2(e^{ix})'|_{x=0} = 1.$$

b) Debemos calcular $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sin\zeta}$ siendo $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ lo indicado en el enunciado. Si denotamos $g(\zeta) = \frac{\zeta}{\sin\zeta}$, tenemos que $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta$.

La función $g(z) = \frac{z}{\sin z}$ tiene una discontinuidad evitable en $z = 0$, pues

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{\sin z}{z}} = 1$$

y por tanto podemos extender $g(z)$ a una función holomorfa en un abierto entorno de cero que contenga a γ, de hecho, este abierto puede ser $G = \mathbb{C}$.

Puesto que $\gamma \sim 0(G)$, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z - z_0} dz = \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) g(z_0)$$

y por tanto

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) g(z_0).$$

Haciendo $z_0 = 0$, $g(z_0) = g(0) = 1$. Además $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma, 0) + \mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 1 + 1 = 2$.

Finalmente:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = 2\pi i \mathrm{Ind}(\gamma, 0) g(0) = 4\pi i.$$

□

Ejercicio 8 *Sea γ_1 el camino cerrado formado por la poligonal que une lo puntos $-1, -i, 2+i, 3, 2-i, i, -1$, en este orden, y γ_2 el borde positivamente orientado del circulo de centro 1 y radio 2, considerado con origen y final en -1. Sea $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Se pide:*

a) *Calcúlese $\int_\Gamma \frac{dz}{z-r}$ para $0 < r < 1$ y para $1 < r < 3$.*

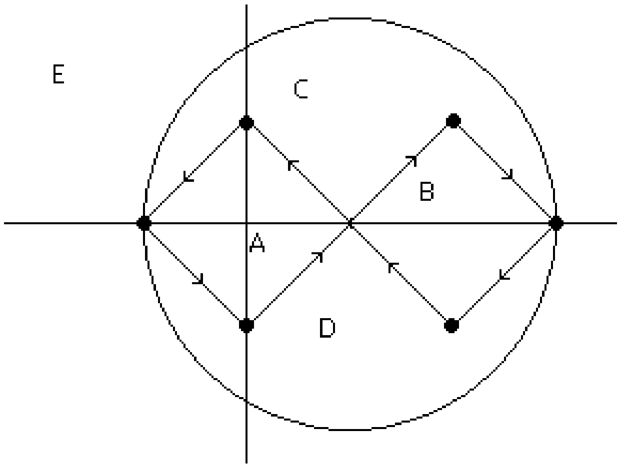
b) *Calcúlese* $\mathrm{Int}(\gamma)$.

c) *Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(c, r))$ con $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$ y $g'(c) \neq 0$. Pruébese que $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ con $z \neq c$ tiene un polo simple en c con residuo $\frac{f(z)}{g'(c)}$.*

d) *Calcúlese*

$$\int_\Gamma \frac{Log(z+2)}{\sin 2z} dz$$

donde Log denota el logaritmo principal.



Solución. Realizando un dibujo de la situación pedida, podemos ver cómo es el camino Γ del enunciado:

Consideramos un abierto Ω suficientemente grande (por ejemplo, $\Omega = D(0,5)$) que contenga a Γ. Si denotamos por σ_1 el borde del cuadrado que delimita la región A, positivamente orientado, y σ_2 el borde de la región B también postivamente orientad, entonces notamos que $\Gamma = \gamma_2 + \sigma_1 - \sigma_2$.

Después de estas consideraciones previas, resolvamos cada apartado del ejercicio.

a) Por la definición de índice, sabemos que la integral que se nos pide calcular es:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-r} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\Gamma, r).$$

Ahora para $0 < r < 1$ aplicando las propiedades aditivas del índice se tiene que

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, r) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, r) + \operatorname{Ind}(\sigma_1, r) - \operatorname{Ind}(\sigma_2, r) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Por tanto si $0 < r < 1$, obtenemos que $\int_\Gamma \frac{dz}{z-r} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\Gamma, r) = 4\pi i$.

Procediendo de la misma forma en el caso en el que $1 < r < 3$, se obtiene que

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, r) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, r) + \operatorname{Ind}(\sigma_1, r) - \operatorname{Ind}(\sigma_2, r) = 1 + 0 - 1 = 0,$$

y así $\int_\Gamma \frac{dz}{z-r} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\Gamma, r) = 0$.

b) En nuestro caso, $\mathbb{C} \setminus \Gamma*$ tiene cinco componentes conexas que hemos denotado por A, B, C, D y E. Sabemos que el índice es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, con lo que basta ver su valor para un punto de cada una de las regiones. Consideremos a, b, c, d y e puntos de A, B, C, D y E respectivamente.

Por lo que ya hemos calculado en el apartado anterior, podemos concluir que

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 2 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ind}(\Gamma, b) = 0.$$

Además, como el punto e está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, podemos decir que $\mathrm{Ind}(\Gamma, e) = 0$.

Veamos qué ocurre con los puntos c y d. Procediendo de manera análoga a lo hecho en el primer apartado del ejercicio, obtenemos:

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, c) = \mathrm{Ind}(\Delta, c) = \mathrm{Ind}(\gamma_2, c) + \mathrm{Ind}(\sigma_1, c) + \mathrm{Ind}(\sigma_2, c) = 1 + 0 + 0 = 1,$$

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, d) = \mathrm{Ind}(\Delta, d) = \mathrm{Ind}(\gamma_2, d) + \mathrm{Ind}(\sigma_1, d) + \mathrm{Ind}(\sigma_2, d) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Por lo anterior y por la definición de interior de un camino tenemos:

$$\mathrm{Int}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \mathrm{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\} = A \cup C \cup D.$$

c) Calculemos el siguiente límite: $\lim_{z \to c} h(z)(z - c)$. Puesto que $g(c) = 0$, obtenemos:

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z)}{g(z)}(z - c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(c)}{z - c}} = \frac{f(z)}{g'(z)}.$$

Luego la función $h(z)$ tiene un polo simple en c de residuo $\frac{f(c)}{g'(c)}$.

d) Puesto que estamos trabajando con el logaritmo principal de $z - 2$, podemos tomar como corte de rama $R = (-\infty, -2]$ y considerar como abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus R$. Tenemos entonces que Γ es homólogo a 0 en Ω, que el conjunto $H = \{k\pi/2 : k \in \mathbb{N}\} \cap \Omega$ es numerable y sin puntos de acumulación en Ω, por lo tanto discreto y $\Gamma^* \cap H = \emptyset$. Además, la función $h(z) = \frac{Log(z+2)}{\sin 2z}$ es holomorfa en $\Omega \setminus H$. Por tanto, estamos en las hipótesis del teorema general del residuo. Aplicando dicho teorema:

$$\int_\Gamma \frac{Log(z + 2)}{\sin 2z} dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathrm{Int}(\Gamma) \cap H} \mathrm{Ind}(\Gamma, a)\mathrm{Res}(h, a) = 2\pi i \mathrm{Ind}(\Gamma, 0)\mathrm{Res}(h, 0).$$

Por el segundo apartado, sabemos que $\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = 2$. Además, si tomamos $f(z) = Log(z - 2)$ y $g(z) = \sin z$, tenemos que $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ y estaríamos en las condiciones del apartado anterior y así $\mathrm{Res}(h, 0) = \frac{Log(2)}{2 \cos 0}$.

Así hemos obtenido:

$$\int_\Gamma \frac{Log(z + 2)}{\sin 2z} dz = 2\pi i Log(2).$$

□

Ejercicio 9 *Estúdiese si la función*

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \qquad (z \neq 0,\, \sin \frac{1}{z} \neq 0),$$

es meromorfa

a) *En* $\mathbb{C}$.

b) *En* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) *Calcúlese el residuo de* f *en cada polo.*

Solución.

a) El conjunto de posibles discontinuidades de la función $f(z)$ es:

$$P_f = \{z_k = \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{z = 0\}.$$

Este conjunto es numerable, pero tiene un punto de acumulación, $z = 0$. Por tanto P_f no es un conjunto discreto y así $f(z)$ no es meromorfa en $\mathbb{C}$.

b) En este caso el conjunto de posibles discontinuidades es:

$$P_f = \{z_k = \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

que es numerable y no tiene puntos de acumulación en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además $f \in \mathcal{H}(G \setminus P_f)$. Comprobemos que $z_k = \frac{1}{k\pi}$ es polo de f para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Debemos ver que $\lim_{z \to z_k} |\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}| = \infty$ o lo que es equivalente $\lim_{z \to z_k} |\sin \frac{1}{z}| = 0$. Efectivamente:

$$\lim_{z \to z_k} \sin \frac{1}{z} = \sin k\pi = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Así, $f(z)$ es meromorfa en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{M}(G)$.

c) Debemos calcular el residuo de f en cada punto $z = \frac{1}{k\pi}$, y para ello debemos saber el valor del siguiente límite:

$$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} (z - \frac{1}{k\pi}) \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

y ver que es distinto de cero. Denotando $h(z) = \sin \frac{1}{z}$ entonces:

$$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z - \frac{1}{k\pi}} = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{h(z) - h(\frac{1}{k\pi})}{z - \frac{1}{k\pi}} = h'(\frac{1}{k\pi}) = -k^2\pi^2 \cos k\pi = (-1)^{k+1} k^2 \pi^2$$

Por tanto

$$\operatorname{Res}(f, \frac{1}{k\pi}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

$\square$

Ejercicio 10 *Sea f una función holomorfa no constante en un abierto conexo que contiene a $\overline{D(0,1)}$ tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.*

a) *Pruébese que f tiene un número finito (≥ 1) de ceros en $D(0,1)$.*

b) *Si los ceros distintos de f en $D(0,1)$ son $\alpha_1, ..., \alpha_m$ con multiplicidades $k_1, ..., k_m$ y para cada $\alpha \in D(0,1)$ se designa por*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z},$$

pruébese que existe un λ de módulo 1 tal que

$$f(z) = \lambda[\varphi_{\alpha_1}(z)]^{k_1}[\varphi_{\alpha_2}(z)]^{k_2}...[\varphi_{\alpha_m}(z)]^{k_m}, \ \forall z \in D(0,1).$$

c) *Si ahora se supone f entera, no constante y cumpliendo también la condición $|f(z)| = 1$ para $|z| = 1$, pruébese que existe un λ de módulo 1 y un $n \geq 1$ tales que $f(z) = \lambda z^n$.*

Solución.

a) En primer lugar, veamos que f tiene algún cero en $D(0,1)$. Por reducción al absurdo, supongamos que no tiene ninguno. Por el principio del módulo máximo, sabemos que $\sup_{D(0,1)}\{|f(z)|\} = \max_{\partial D(0,1)}\{|f(z)|\} = 1$. Además debe ser $\inf_{D(0,1)}\{|f(z)|\} < 1$, pues si $\inf_{D(0,1)}\{|f(z)|\} = 1$, tendríamos $|f(z)| = 1$ constante en $D(0,1)$ con lo que f sería constante, en contra de las hipótesis.

   Por tanto, $\inf_{D(0,1)}\{|f(z)|\} < 1$. Entonces $\inf_{D(0,1)}\{|f(z)|\} = \min_{\overline{D(0,1)}}\{|f(z)|\} = \min_{D(0,1)}\{|f(z)|\}$ puesto que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Es decir, que $|f(z)|$ alcanza el mínimo en $D(0,1)$, lo que contradice el principio del módulo mínimo. Luego f tiene algún cero en $D(0,1)$.

   Veamos ahora que el número de ceros es finito. De nuevo, supongamos lo contrario. Sea $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un conjunto infinito de ceros (distintos) de f en $D(0,1)$. Puesto que todo conjunto infinito contenido en un compacto tiene un punto de acumulación, el conjunto A tendrá puntos de acumulación en $\overline{D(0,1)}$ y como por hipótesis $\overline{D(0,1)} \subset G$, se tiene un conjunto infinito con untos de acumulación donde la función se anula. Aplicando el teorema de identidad se obtiene f idénticamente nula, lo que contradice las hipótesis del enunciado.

   Así, la función f tiene un número finito de ceros.

b) Sabemos que los automorfismos del disco unidad φ_α son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \backslash \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$ (con el convenio $\frac{1}{0} = \infty \notin \mathbb{C}$)y que tienen como único cero de orden uno al punto $z = \alpha$. Sea:

$$h(z) = \frac{f(z)}{\lambda[\varphi_{\alpha_1}(z)]^{k_1}[\varphi_{\alpha_2}(z)]^{k_2}...[\varphi_{\alpha_m}(z)]^{k_m}},$$

donde $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ son los ceros de f en $D(0,1)$ y $k_1, ..., k_m$ sus órdenes. Así $h \in \mathcal{H}(G \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha_i}}\}_{i=1,...,m} \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_m\})$.

Puesto que $|\alpha_i| < 1$, se tiene que $\frac{1}{|\overline{\alpha_i}|} > 1$ para $i = 1, ..., m$ y por tanto $G' = G \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha_i}}\}_{i=1,...,m}$ es un abierto conexo que contiene a $\overline{D(0,1)}$.

Del lema de Schwartz y de las propiedades de los automorfismos del disco unidad, sabemos que $|\varphi_\alpha(z)| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$, luego si $|z| = 1$ se tiene que $|h(z)| = 1$. Así, los posibles ceros de h en $D(0,1)$ estarán entre los ceros de f, pero vamos a comprobar que en realidad, la función h no tiene ceros:

$$\lim_{z \to \alpha_i} h(z) = \lim_{z \to \alpha_i} \frac{(z-\alpha_i)^{k_i} g(z)}{(z-\alpha_i)^{k_i} \frac{1}{1-\overline{\alpha_i} z} [\varphi_{\alpha_1}(z)]^{k_1} ... [\varphi_{\alpha_m}(z)]^{k_m}} \neq 0,$$

donde $g(\alpha_i) \neq 0$ y $g(z) \in \mathcal{H}(G)$.

En principio, la función h no tiene por qué estar definida en los α_i, pero son singularidades evitables y por tanto podemos extender h a una función holomorfa no nula en α_i.

Así, la extensión de h es una función sin ceros en $D(0,1)$, con lo que no se cumple el resultado del apartado anterior. Por el apartado anterior h es constante y $|h(z)| = 1$. Por tanto, hemos encontrado λ de módulo 1 tal que

$$f(z) = \lambda [\varphi_{\alpha_1}(z)]^{k_1} [\varphi_{\alpha_2}(z)]^{k_2} ... [\varphi_{\alpha_m}(z)]^{k_m}, \qquad \forall z \in G' \supset D(0,1).$$

c) Comprobemos que bajo las hipótesis que nos plantean, la función f sólo puede tener un cero y éste va a ser $\alpha = 0$. Estamos en las condiciones de los dos apartados anteriores, luego por el primero, f debe tener algún cero. Por el segundo:

$f(z) = \lambda [\varphi_{\alpha_1}(z)]^{k_1} ... [\varphi_{\alpha_m}(z)]^{k_m}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha_1}}, ..., \frac{1}{\overline{\alpha_m}}\}$ donde $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son los ceros de f en $D(0,1)$. Pero si $\alpha_j \neq 0$, entonces $\lim_{z \to 1/\overline{\alpha_j}} |f(z)| = \infty$, lo que contradice que f sea entera. Por tanto, el único cero de f en $D(0,1)$ es el 0 y $f(z) = \lambda z^k$ siendo k el orden del cero y con $|\lambda| = 1$.

$\square$

Ejercicio 11 *Encuéntrese una transformación de Möbius que transforme:*

i) *El eje real en la circunferencia unidad, y el semiplano* $\Im z > 0$ *en* $D(0,1)$.

ii) *Los puntos* $1, i, -1$ *en* $i, -1, 1$ *respectivamente.*

iii) *los puntos* $-1, 0, 1$ *en* $-1, i, 1$ *respectivamente.*

En los dos últimos casos, ¿cuál es la imagen de $D(0,1)$*?*

Solución. Se nos piden calcular transformaciones de Möbius, que sabemos que tiene la siguiente forma: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ por determinar y $ad - bc \neq 0$. Estas aplicaciones quedan unívocamente determinadas por la imagen de tres puntos.

i) En el primero de los casos se nos pude que $T(z)$ transforme el eje real en el borde del disco unidad. Existirán infinitas aplicaciones que hagan esto en función de los puntos que se elijan y de sus imágenes. Para determinar una de ellas, elegimos tres puntos del eje real, por ejemplo, $-1, 0 - 1$ y tres puntos del borde del disco que serán las respectivas imágenes, por ejemplo, $-1, 1, i$.

   Calculemos los coeficientes de la transformación de Möbius que hace $\{-1, 0, 1\} \mapsto \{-1, 1, i\}$. Sustituyendo:

$$T(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d.$$
$$T(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = -1 \Rightarrow -a + b = c - d.$$
$$T(1) = \frac{a+b}{c+d} = i \Rightarrow a + b = ci + di.$$

   Si $b = d = 0$, entonces $a = -c = ic$ y así $a = c = 0$ que no es una solución. Por tanto podemos tomar, por ejemplo, $b = d = 1$ y entonces $a = 1 + 2i$ y $c = 1 - 2i$. Por tanto una solución es

$$T(z) = \frac{(1+2i)z + 1}{(1-2i)z + 1}.$$

   Comprobemos que se cumple $T(\{z : \Im z > 0\}) = D(0, 1)$. Puesto que T es continua, transforma componentes conexas en componentes conexas, con lo que sólo es necesario comprobar lo anterior para un punto concreto, por ejemplo, $z = i$:

$$T(i) = \frac{(1+2i)i + 1}{(1-2i)i + 1} = \frac{-1+i}{3+i} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \in D(0, 1),$$

   con lo que se cumplen las condiciones requeridas para $T(z)$.

ii) En este caso debemos calcular la transformación que manda $\{1, i, -1\} \mapsto \{i, -1, 1\}$. De nuevo, sustituyendo:

$$T(1) = \frac{a+b}{c+d} = i \Rightarrow a + b = ci + di.$$
$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = -1 \Rightarrow ai + b = -ci - d.$$
$$T(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = 1 \Rightarrow -a + b = -c + d.$$

   Una solución es $a = 1 + 2i$, $b = 1$, $c = 1$ y $d = 1 - 2i$, con lo que la transformación de Möbius es:

$$T(z) = \frac{(1+2i)z + 1}{z + (1-2i)}.$$

Puesto que la transformación lleva el borde de la circunferencia unidad en sí mismo, se tiene que la imagen del disco $D(0,1)$ es o bien él mismo o bien $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Ahora bien,

$$T(0) = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \in D(0,1),$$

con lo que $T(D(0,1)) = D(0,1)$.

iii) En el último caso, se nos pide calcular la transformación que lleva $\{-1,0,1\} \mapsto \{-1,i,1\}$. Si sustituimos:

$$T(0) = \frac{b}{d} = i \Rightarrow b = di.$$

$$T(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1 \Rightarrow a+b = c+d.$$

$$T(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = -1 \Rightarrow -a+b = c-d.$$

Una solución es $a = 1$, $b = i$, $c = i$ y $d = 1$. De esta forma, la transformación de Möbius pedida es:

$$T(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Por las mismas razones que en el caso anterior y puesto que $T(0) = i$, concluimos que $T(D(0,1)) = \{z : \Im z > 0\}$.

$\square$

Ejercicio 12 *Sean $f, g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas, tales que $f(0) = g(0)$, $g(D(0,1)) \subset f(D(0,1))$ y f es inyectiva.*

a) *Pruébese que*

$$g(D(0,r)) \subset f(D(0,r)) \qquad \forall 0 < r < 1.$$

b) *Pruébese que $|g'(0)| \leq |f'(0)|$.*

c) *Si $|g'(0)| = |f'(0)|$, entonces $g(D(0,1)) = f(D(0,1))$. ¿Puede decirse algo más de la relación existente entre f y g en este caso?*

Solución. Antes de comenzar cada apartado, observamor que si la función f es inyectiva, entonces tiene inversa global, de forma que $f^{-1} \circ g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y por hipótesis se tiene que $f^{-1} \circ g(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Además $f^{-1} \circ g(0) = f^{-1}(g(0)) = 0$. Así, estamos en las hipótesis del lema de Schwartz.

a) Por lo que hemos observado anteriormente $|f^{-1} \circ g(z)| \leq |z|$ si $z \in D(0,1)$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que para algún $0 < r < 1$ existe un $z_0 \in D(0,r)$ tal que $g(z_0) \notin f(D(0,r))$. Entonces $(f^{-1} \circ g)(z_0) \notin D(0,r)$, pero $(f^{-1} \circ g)(z_0) \in D(0,1)$ y por tanto obtenemos la contradicción $|(f^{-1} \circ g)(z_0)| > r > |z_0|$.

Así debe ser $g(D(0,r)) \subset f(D(0,r))$ para todo $0 < r < 1$.

b) Por la observación previa, aplicando la regla de la cadena y el teorema de la derivada de la función inversa, se obtiene directamente lo que buscamos:

$$\begin{aligned} |(f^{-1} \circ g)'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow & |(f^{-1})'(g(0))g'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & |\frac{1}{f'(f^{-1}(g(0)))}g'(0)| \Leftrightarrow |\frac{1}{f'(0)}g'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & |\frac{1}{f'(0)}||g'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow |g'(0)| \leq |f'(0)|. \end{aligned}$$

c) Si ahora $|g'(0)| = |f'(0)|$, de nuevo aplicando el lema de Schwartz tenemos que existe λ de módulo 1 tal que $(f^{-1} \circ g)(z) = \lambda z$, y como $f^{-1} \circ g(D(0,1)) = D(0,1)$, entonces $g(D(0,1)) = f(D(0,1))$.

Además se tiene que $g(z) = f(\lambda z)$.

$\square$

Ejercicio 13 *Sea G un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{H}(G)$ con la topología compacto-abierta.*

a) *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ una familia normal. Pruébese que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es también normal. Póngase un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.*

b) *Pruébese que si $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}'$ es normal, entonces $\mathcal{F}$ también es normal.*

c) *Si G es un dominio, pruébese que en* b) *basta suponer que existe un punto $a \in G$ tal que $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado.*

Solución.

a) Es un resultado conocido de teoría (Teorema de Weierstrass) que el operador "derivar" es una aplicación continua en el espacio de las funciones holomorfas en un abierto con la topología compacto-abierta:

$$\partial : (\mathcal{H}(G), \tau_c) \longrightarrow (\mathcal{H}(G), \tau_c)$$

$$f \longmapsto \partial(f) = f'$$

Dada una sucesión (f'_n) en $\mathcal{F}'$ debemos encontrar una subsucesión convergente en en $\mathcal{F}'$. Dada (f'_n), existe (f_n) en $\mathcal{F}$ tal que $(f_n)' = f'_n$ para todo n. Ahora, como la familia $\mathcal{F}$ es normal, existe f en $\mathcal{F}$ y una subsucesión (f_{n_i}) de (f_n) tal que $f_{n_i} \to f$ en τ_c.

Por ser δ una aplicación continua, obtenemos que $(f'_{n_i}) \to f'$, luego la familia $\mathcal{F}'$ también es normal.

Un contraejemplo de que el recíproco no es cierto es el siguiente: Consideremos $\mathcal{F}' = \{1\}$ que claramente es normal y sin embargo $\mathcal{F} = \{z + n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal. El teorema de Ascoli-Arzelà asegura que una familia es normal si y sólo si es equicontinua y puntualmente acotada, y nuestra familia $\mathcal{F}$ no es puntualmente acotada.

b) Para ver que la familia $\mathcal{F}$ es normal, por el teorema de Montel basta ver que es localmente acotada en G.

Sea $a \in G$. Por ser $\mathcal{F}$ puntualmente acotada, existe $M > 0 : \sup\{|f(a)| : f \in \mathcal{F}\} \leq M$. Además, $\mathcal{F}'$ es puntualmente acotada, luego por el teorema de Montel existe $D(a, r)$ entorno abierto de a tal que $\sup\{|f'(z) : z \in D(a, r)|\} \leq N < \infty$.

Por tanto, para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo punto $z \in D(a, r)$ se tiene $f(z) - f(a) = \int_{[a,z]} f'$ y consecuentemente:

$$|f(z)| = |\int_{[a,z]} f' + f(a)| \leq |\int_{[a,z]} f'| + |f(a)| \leq |\int_{[a,z]} N| + M \leq Nr + M < \infty.$$

Es decir, $\mathcal{F}$ está localmente acotada y de nuevo, por el teorema de Montel, $\mathcal{F}$ es normal.

c) Si ahora G es un dominio, $\mathcal{F}'$ es normal y $\mathcal{F}$ está acotada en un punto $a \in G$, demostremos que entonces $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada.

Sea $z_0 \in G$, por ser éste un dominio, existe un camino $\gamma : [0, 1] \to G$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z_0$. Como $\mathcal{F}'$ es normal, está uniformemente acotada sobre el compacto γ^*, es decir, existe $N > 0$ tal que $\|f'\|_{\gamma^*} = \sup\{|f'(z)| : z \in \gamma^*\} \leq N$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Sea también $M = \sup\{|f(a) : f \in \mathcal{F}|\}$.

Por tanto, para toda $f \in \mathcal{F}$, tenemos $f(z_0) - f(a) = \int_\gamma f'$ y por tanto:

$$|f(z_0)| = |\int_\gamma f' + f(a)| \leq |\int_\gamma f'| + |f(a)| \leq |\int \gamma N| + M \leq N long(\gamma) + M < \infty.$$

Entonces $\sup\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} \leq N long(\gamma) + M < \infty$ y así $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada. Aplicando el apartado anterior, se obtiene que $\mathcal{F}$ es normal.

□

Ejercicio 14 *Sea u una función armónica en un dominio G de $\mathbb{C}$.*

a) *Si u es idénticamente nula en en un abierto no vacío de G, pruébese que u es nula en todo G.*

b) *Demuéstrese que si existe un punto en G en el que todas las derivadas parciales de u son* 0*, entonces u es idénticamente nula.*

c) *Pruébese que una función armónica no constante sobre un dominio, es una aplicación abierta.*

Solución.

a) Utilizamos en este apartado una técnica usual cuando se quiere probar que una cierta propiedad se verifica en un conjunto conexo. Puesto que si G es un dominio entonces es conexo y consideramos el conjunto

$$H = \{z \in G : \exists D(z,r) \subset G \text{ con } u|_{D(z,r)} = 0\}$$

y comprobaremos que es no vacío, abierto y cerrado en G, y por tanto deberá ser el total.

No vacío: Por hipótesis, sea A abierto no vacío tal que $u|_A = 0$. Por tanto existe $D(z,r) \subset A \subset G$ tal que $u|_{D(z,r)} = 0)$.

Abierto: Por la propia definición de H.

Cerrado: Consideramos un sucesión (z_n) en H tal que $z_n \to z_0$, veamos que z_0 está en H. Sea $D(z_0,r) \subset G$. Por ser (z_n) convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene $z_n \in D(z_0,r)$. Para uno de estos z_n existirá un R tal que $u|_{D(z_n,R)} = 0$. Por tanto u será nula en $D(z_n,R) \cap D(z_0,r)$. Aplicando el teorema de identidad se obtiene $u|_{D(z_0,r)} = 0$, luego $z_0 \in H$.

Como ya habíamos dicho, al ser G conexo, tenemos que $H = G$ y por tanto u es nula en todo G, como se quería probar.

b) Sea z_0 el punto de G en el que todas las parciales de u se anulan. Sea $D(z_0,r) \subset G$. Por ser u una función armónica, sabemos que existe una función $f \in \mathcal{H}(D(z_0,r))$ tal que $\Re f = u|_{D(z_0,r)}$. Desarrollamos f como serie de potencias en un entorno de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Expresamos las derivadas sucesivas de f en z_0 en función de las derivadas parciales de u, que son nulas por hipótesis:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 0,$$

$$f''(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(z_0) = 0$$

y en general

$$f^{n)}(z_0) = \frac{\partial \Re f^{n-1}}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial \Re f^{n-1}}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Por tanto $f \equiv 0$ en un entorno $D(z_0, r)$ de z_0 con lo que $u|_{D(z_0,r)} \equiv 0$ y aplicando el apartado anterior, se tiene u idénticamente nula en G.

c) Sea u función armónica no constante y $U \subset G$ un abierto. Veamos que $u(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Por ser U abierto, existe una colección de discos $\{D_i\}_{i\in I}$ tal que $U = \cup D_i$. Al ser u no constante, en particular no es constante sobre cada disco abierto. En caso contrario, aplicando el teorema de identidad tendríamos u constante.

Veamos que $u(D_i)$ es abierto para cada $i \in I$. De nuevo, por ser u armónica, existe una función $f_i \in \mathcal{H}(D_i)$ tal que $\Re f_i = u|_{D_i}$. Como u no es constante entonces f_i no es constante y por el teorema de la aplicación abierta $f_i(D_i)$ es abierto y por tanto $\Re f_i(D_i)$ es abierto (pues las proyecciones son abiertas) y así $u(D_i)$ es abierto.

Entonces $u(U) = u(\cup D_i) = \cup u(D_i)$ es abierto.

$\square$

Ejercicio 15 *Calcúlese directamente la integral de Poisson para el valor en la frontera* $f(e^{i\theta}) = \sin\theta + \cos\theta$.

Solución. Para encontrar una solución al problema de valor en la frontera $\sin\theta + \cos\theta$, basta con encontrar una solución al problema con valor en la frontera $\sin\theta$ y otra solución al problema con $\cos\theta$ y sumar ambas.

De la teoría se conoce que la solución al problema de Dirichlet existe y es única, y que además la expresión de dicha solución es:

$$u(z) = \Re g(z) = \Re\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\zeta\Big\}, \tag{1}$$

donde $\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ es el núcleo de Poisson y $z = re^{i\theta}$.

Resolvamos entonces el problema para el valor de la frontera $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$, siendo $\zeta = e^{i\theta}$. De esta forma, debemos tomar, en la expresión 1, $f(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$.

$$\begin{aligned} g_1(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\frac{1}{2}\Big(\zeta+\frac{1}{\zeta}\Big)\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\Big)d\zeta = \frac{1}{4\pi i}\int_\gamma \Big(1+\frac{1}{\zeta^2}\Big)\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\Big)d\zeta = \\ =& \frac{1}{4\pi i}\Big[\int_\gamma \frac{\zeta}{\zeta-z}d\zeta + \int_\gamma \frac{z}{\zeta-z}d\zeta + \int_\gamma \frac{1}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta + \int_\gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta-z)}d\zeta\Big] \end{aligned}$$

La primera de las integrales la calculamos con la fórmula integral de Cauchy y la segunda de ellas no es más que el índice de γ con respecto al punto z. Las dos integrales restantes las podemos calcular por descomposición en fracciones simples:

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{A}{\zeta}+\frac{B}{\zeta-z}\Big)d\zeta = A\mathrm{Ind}(\gamma,0) + B\mathrm{Ind}(\gamma,z) = A + B = 0,$$

ya que $A(\zeta - z) + B\zeta = 1$ para todo $\zeta \in \gamma$, de donde $A + B = 0$.

$$\int_\gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{A}{\zeta} + \frac{B}{\zeta^2} + \frac{C}{\zeta - z} d\zeta \Big) = A + C = 0,$$

puesto que $A\zeta(\zeta - z) + B(\zeta - z) + C\zeta^2 = z$ de donde $A + C = 0$, y además $\frac{B}{\zeta^2}$ tiene primitiva con lo que $\int_\gamma \frac{B}{\zeta^2} d\zeta = 0$.

De esta forma:

$$g_1(z) = \frac{1}{4\pi i}(2\pi i z + 2\pi i z + 0 + 0) = z,$$

con lo que $u_1(z) = \Re z$ o más claramente, como $z = re^{i\theta}$, $u_1(re^{i\theta}) = r\cos\theta$.

Procedemos ahora de manera análoga pero tomando, en la expresión 1 $f(\zeta) = \frac{1}{2i}\Big(\zeta - \frac{1}{\zeta}\Big)$, y aplicamos de nuevo los cálculos anteriores:

$$\begin{aligned} g_2(z) =& \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta} \frac{1}{2i} \Big(\zeta - \frac{1}{\zeta}\Big)\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big) d\zeta = \frac{1}{-4\pi} \int_\gamma \Big(1 - \frac{1}{\zeta^2}\Big)\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big) d\zeta = \\ =& \frac{1}{-4\pi}\Big[\int_\gamma \frac{\zeta}{\zeta - z} d\zeta + \int_\gamma \frac{z}{\zeta - z} d\zeta - \int_\gamma \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta - \int_\gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta \Big] = \\ =& \frac{-1}{4\pi}(2\pi i z + 2\pi i z - 0 - 0) = -iz. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_2(re^{i\theta}) = \Re(-ire^{i\theta}) = r\sin\theta$.

En consecuencia, sumando las dos soluciones anteriores, obtenemos la solución al problema de valor en la frontera $f(e^{i\theta}) = \sin\theta + \cos\theta$, que es $u(re^{i\theta}) = r\cos\theta + r\sin\theta$. □

Ejercicio 16 *Sea u una función armónica positiva en $U = D(0, 1)$ y tal que $u(0) = 1$. Encuéntrese estimaciones del valor de $u(\frac{1}{2})$.*

Solución. Aplicando la desigualdad de Harnack para funciones armónicas positivas:

$$\frac{R - r}{R + r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} u(a) \quad \text{ en } D(a, R).$$

En nuestro caso particular, $R = 1$, $a = 0$, $r = \frac{1}{2}$, y por tanto

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} 1 \leq u(\frac{1}{2}) \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} 1,$$

y por tanto las estimaciones para el valor de u pedido son

$$\frac{1}{3} \leq u(\frac{1}{2}) \leq 3.$$

□

Ejercicio 17 a) *Si* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *son dos normas sobre un espacio vectorial* E*, pruébese que las expresiones* $\alpha\|\cdot\|_1+\beta\|\cdot\|_2$ $(\alpha,\beta>0)$ *y* $\text{máx}\{\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2\}$ *definen sendas normas en* E*.*

b) *Calcúlese la bola unidad cerrada en* $\mathbb{R}^2$ *de la norma* $\|\cdot\| = \frac{1}{2}\|\cdot\|_1 + \frac{1}{2}\|\cdot\|_\infty$.

c) *Sea* E *un espacio normado no trivial. Pruébese que la adherencia de cualquier bola abierta es la correspondiente bola cerrada, que el diámetro de* $B(a,r)$ *es* $2r$ *y que si* $B(a,r)\subset B(b,s)$*, entonces* $r\leq s$ *y* $\|a-b\|\leq s-r$*.*

d) *Demuéstrese que en un espacio de Banach, toda sucesión encajada de bolas cerradas no vacías, tiene un punto en común.*

e) *En* $E=(\mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ *se consideran los conjuntos*

$$C_n = \{f\in E : f(0)=1, 0\leq f(t)\leq 1 \textit{ si } t\in[0,1/n], f(t)=0 \textit{ si } t\in[1/n,1]\}.$$

Pruébese que (C_n) *es una sucesión decreciente de cerrados, acotados y no vacíos, con intersección vacía.*

Solución.

a) Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en el espacio vectorial E.

Verifiquemos que la expresión $\|\cdot\|=\alpha\|\cdot\|_1+\beta\|\cdot\|_2$ con $\alpha,\beta>0$ es norma en E.

1. $\alpha\|x\|_1+\beta\|x\|_2\geq 0$ para todo $x\in E$, pues $\|x\|_1,\|x\|_2\geq 0$ y $\alpha,\beta\geq 0$.
2. Para todo $x\in E$ y para todo $\lambda\in\mathbb{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| =&\alpha\|\lambda x\|_1+\beta\|\lambda x\|_2 = \alpha|\lambda|\|x\|_1+\beta|\lambda|\|x\|_2 = \\ =&|\lambda|(\alpha\|x\|_1+\beta\|x\|_2) = |\lambda|\|x\|.\end{aligned}$$

3. Mostremos ahora que se cumple la desigualdad triangular para todos $x,y\in E$.

$$\begin{aligned}\|x+y\| =&\alpha\|x+y\|_1+\beta\|x+y\|_2 \leq \alpha(\|x\|_1+\|y\|_1)+\beta(\|x\|_2+\|y\|_2) = \\ =&\alpha\|x\|_1+\beta\|x\|_2+\alpha\|y\|_1+\beta\|y\|_2 = \|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

4. Por último, demostremos que $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$.
   Si $\|x\|=0$, entonces $\alpha\|x\|_1+\beta\|x\|_2=0$ y puesto que ambos sumandos son no negativos, debe ser $\|x\|_1=\|x\|_2=0$ y por tanto $x=0$.
   Recíprocamente, si $x=0$ se tiene que $\|x\|_1=\|x\|_2=0$ y como consecuencia $\|x\|=\alpha\|x\|_1+\beta\|x\|_2=0$.

Comprobemos ahora que la expresión $\|\cdot\|=\text{máx}\{\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2\}$ también define una norma en E.

1. Puesto que $\|x\|_1,\|x\|_2\geq 0$ para todo $x\in E$, obtenemos que $\text{máx}\{\|x\|_1,\|x\|_2\}\geq 0$ y por tanto $\|x\|\geq 0$ para todo $x\in E$.

2. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in E$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| =& \max\{\|\lambda x\|_1, \|\lambda x\|_2\} = \max\{|\lambda|\|x\|_1, |\lambda|\|x\|_2\} = \\ =& |\lambda| \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\} = |\lambda|\|x\|.\end{aligned}$$

3. Comprobemos que para todo $x, y \in E$ se cumple la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\|x+y\| =& \max\{\|x+y\|_1, \|x+y\|_2\} \leq \max\{\|x\|_1 + \|y\|_1, \|x\|_2 + \|y\|_2\} \leq \\ \leq& \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\} + \max\{\|y\|_1, \|y\|_2\} = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

4. Para terminar, demostremos $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\} = 0 \Leftrightarrow \|x\|_1 = \|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Debemos calcular la bola unidad en $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\| = \frac{1}{2}\|\cdot\|_1 + \frac{1}{2}\|\cdot\|_\infty$ donde, como es habitual, $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ y $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

La bola unidad $B(0,1)$ en la norma $\|\cdot\|$ es $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overline{x}\| \leq 1\}$ con $\overline{x} = (x,y)$. Tenemos que encontrar las ecuaciones que verifican los puntos de $\mathbb{R}^2$ en la bola unidad, esto es:

$$\|(x,y)\| = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\max\{|x|, |y|\} \leq 1$$

y por tanto:

$$\begin{cases} 2|x| + |y| \leq 2 \text{ si } \max\{|x|, |y|\} = |x| \\ |x| + 2|y| \leq 2 \text{ si } \max\{|x|, |y|\} = |y| \end{cases}$$

es decir, o bien

$$\begin{cases} 2|x| + |y| \leq 2 \\ |y| \leq |x| \end{cases}$$

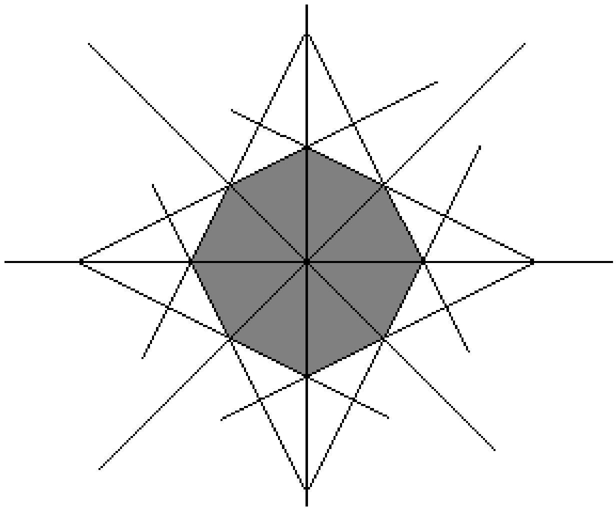
o bien

$$\begin{cases} |x| + 2|y| \leq 2 \\ |x| \leq |y| \end{cases}$$

La zona sombreada del dibujo muestra la forma de esta bola, junto con las rectas que delimitan su frontera:

c) Sea $B(a,r)$ la bola abierta de centro a y radio r. Aplicando traslaciones es suficiente probar todo lo que se pide en este apartado para la bola $B(0,r)$ de centro 0.

Sea $\overline{B(0,r)}$ la adherencia o clausura de $B(0,r)$. Debemos comprobar que dicha adherencia es la bola cerrada $B[0,r]$ de centro 0 y radio r. Puesto que $\overline{B(0,r)}$ es el menor cerrado que contiene a $B(0,r)$, uno de los contenidos es obvio, $\overline{B(0,r)} \subset B[0,r]$.



Para ver el otro contenido, sea $x \in B[0,r]$, es decir, $\|x\| \leq r$. Si $\|x\| < r$, entonces x está en $B(0,r)$ y por tanto en $\overline{B(0,r)}$. Supongamos ahora que $\|x\| = r$ y sea $B(x,\delta)$ una bola abierta de centro x y radio arbitrario δ. Comprobemos que $B(0,r) \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$. Consideramos el punto $z = x\frac{r-\delta/2}{\|x\|}$ que está en el segmento que une x con 0. Veamos que $z \in B(0,r) \cap B(x,\delta)$.

$$\|x - z\| = \|x - x\frac{r - \frac{\delta}{2}}{\|x\|}\| = \|\frac{x}{\|x\|}\|\|\|x\| - r + \frac{\delta}{2}\| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

$$\|0 - z\| = \|z\| = \|x\frac{r - \frac{\delta}{2}}{\|x\|}\| = \|r - \frac{\delta}{2}\| = r - \frac{\delta}{2} < r.$$

Así $x \in \overline{B(0,r)}$ y por tanto $\overline{B(0,r)} = B[0,r]$.

Demostremos ahora que $\mathrm{Diam}B(0,r) = 2r$. Por definición de diámetro de un conjunto, sabemos que $\mathrm{Diam}B(0,r) = \sup_{x,y\in B(0,r)} \|x - y\|$.

Desde luego, para todo $x, y \in B(0,r)$ se tiene $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| < 2r$, con lo que $\mathrm{Diam}B(0,r) \leq 2r$. Por otro lado, para cada $\varepsilon > 0$ y $z \neq 0$ sean $x = (r - \frac{\varepsilon}{2})\frac{z}{\|z\|}$ e $y = (\frac{\varepsilon}{2} - r)\frac{z}{\|z\|}$. Entonces

$$\|x - y\| = \|(r - \frac{\varepsilon}{2})\frac{z}{\|z\|} - (\frac{\varepsilon}{2} - r)\frac{z}{\|z\|}\| = 2r - \varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

De esta forma $\mathrm{Diam}B(0,r) \geq 0$ y por tanto $\mathrm{Diam}B(0,r) = 2r$.

Para terminar el apartado, tenemos que ver que si $B(a,r) \subset B(b,s)$, entonces $r \leq s$ y $\|a - b\| \leq s - r$.

La primera afirmación es sencilla, pues:

$$2r = \text{Diam}B(a,r) \leq \text{Diam}B(b,s) = 2s,$$

y por tanto $r \leq s$.

De nuevo, para la segunda parte es suficiente con demostrarlo para $b = 0$. Supongamos por reducción al absurdo, que $\|a\| = \|a - b\| > s - r$. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|a\| - \varepsilon = s - r$, o lo que es lo mismo, $\|a\| = s - r + \varepsilon$.

Sea $z = a + \frac{a}{\|a\|}(r - \frac{\varepsilon}{2})$. Entonces:

$$\|z - a\| = \|a + \frac{a}{\|a\|}(r - \frac{\varepsilon}{2}) - a\| = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$$

y así $z \in B(a,r)$. Por otro lado:

$$\|z - b\| = \|z\| = \|a + \frac{a}{\|a\|}(r - \frac{\varepsilon}{2})\| = \|\|a\| + r - \frac{\varepsilon}{2}\| = s + \frac{\varepsilon}{2}$$

y en consecuencia $z \notin B(0,s)$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis teníamos $B(a,r) \subset B(b,s)$.

Así debe ser $\|a - b\| \leq s - r$.

d) Sea $B_1[a_1,r_1] \supset B_2[a_2,r_2] \supset ... \supset B_n[a_n,r_n] \supset ...$ una sucesión cumpliendo las condiciones del enunciado. Por el apartado anterior se tiene $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_n \geq ... \geq 0$. Así la sucesión de radios (r_i) es decreciente y acotada, luego debe ser convergente, y por tanto de Cauchy. Como consecuencia de esto último y aplicando de nuevo el apartado anterior, obtenemos

$$\|a_n - a_m\| \leq |r_n - r_m| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n,m \to \infty,$$

y así la sucesión de centros (a_i) es de Cauchy. Puesto que estamos en un espacio de Banach, la sucesión (a_i) converge al ser de Cauchy digamos a un punto a. Probemos que $a \in B_n(a_n,r_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a = \text{lím}_{m>n} a_m \in B[a_n,r_n]$ y por tanto $a \in \cap B[a_n,r_n]$. Así a es punto común de todas las bolas de la sucesión.

e) Consideramos el espacio $E = (\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo, y los conjuntos

$$C_n = \{f \in E : f(0) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0,1/n], f(t) = 0 \text{ si } t \in [1/n,1]\}.$$

Veamos en primer lugar que son cerrados. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos una sucesión de funciones $(f_m) \subset C_n$ que sea convergente a f en el sentido de $\|\cdot\|_\infty$. Ahora debemos comprobar que f está en C_n.

Para un t_0 fijo en $[0,1]$ tenemos $\|f_m - f\|_\infty = \sup|f_m(t) - f(t)| \geq |f_m(t_0) - f(t_0)|$ y puesto que se da convergencia uniforme, en particular, se obtiene la convergencia puntual y así para cada t_0 fijo en $[0,1]$ tenemos que $f_m(t) \to f(t)$. Al estar cada una de las f_m en C_n, verifican que $f_m(0) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y por tanto $f(0) = 1$. De igual manera, para cada $t \in [1/n, 1]$ se verifica $f_m(t) = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y por tanto $f(t) = 0$ si $t \in [1/n, 1/m]$. Por último, sea $t \in [0, 1/n]$ con $0 \leq f_m(t) \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $0 \leq f(t) \leq 1$.

Es evidente que $C_{n+1} \subset C_n$. Por la propia definición de estos conjuntos se obtiene:

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} =&\{f \in E : f(0) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{n+1}],\\
&f(t) = 0 \text{ si } t \in [\frac{1}{n+1}, 1] = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1]\} \subset\\
\subset&\{f \in E : f(0) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{n+1}], 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\\
&f(t) = 0 \text{ si } t \in [\frac{1}{n}, 1]\} = C_n.
\end{aligned}
$$

Para ver que C_n está acotado, basta con comprobar que para toda función $f \in C_n$, se tiene que la norma $\|f\|_\infty$ está controlada por una constante. Por la propia definición de C_n, obtenemos que si $f \in C_n$, entonces $\|f\|_\infty \leq 1$ y por tanto $C_n \subset B_E[0, 1]$ y así está acotado.

Comprobemos que $C_n \neq \emptyset$. Dado un cierto $n \in N$ siempre podemos encontrar una función continua que sea lineal en $[0, 1/n]$ y de forma que $f(0) = 1$ y $f(t) = 0$ en $[1/n, 0]$.

Ahora bien, la intersección común de toda la familia (C_n), de existir debiera ser una función f tal que $f(0) = 1$ y $f(t) = 0$ si $t \in (0, 1]$, luego f no puede ser continua en 0. Por tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$.

$\square$

Ejercicio 18 a) *Demuéstrese que si* $0 < p < 1$, $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, *se cumple* $\sum |a_n + b_n|^p \leq \sum |a_n|^p + \sum |b_n|^p$.

b) *Pruébese que* c_{00} *es denso en cada uno de los espacios* ℓ_p *con* $1 \leq p < \infty$. *¿Qué ocurre en* ℓ_∞*?*

c) *Si* $p \leq p'$, *pruébese que* $\ell_p \subset \ell_{p'}$ *y la inclusión canónica tiene norma 1. Muéstrese también que si* $p \neq p'$, *entonces* $\ell_p \neq \ell_{p'}$.

d) *Si* $x \in \ell_p$ *para algún* $p \geq 1$, *resulta por el apartado anterior que* $x \in \ell_s$ *para todo* $s \geq p$. *Pruébese que existe* $\lim_{s\to\infty} \|x\|_s = \inf_{s\geq p} \|x\|_s = \|x\|_\infty$.

Solución.

a) Para demostrar el resultado, basta con ver la correspondiente desigualdad para un sólo término, es decir, comprobar que $|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p$.

Consideremos $r = \frac{1}{p} > 1$ y los vectores $u = (|a|^p, 0)$ y $v = (0, |b|^p)$ con lo que $u, v \in \mathbb{R}^2$. Ahora podemos aplicar la desigualdad de Minkowski que ya conocemos y obtener:

$$\|u+v\|_r \le \|u\|_r + \|v\|_r.$$

Puesto que

$$\|u+v\|_r = \|(|a|^p, |b|^p)\|_r = ((|a|^p)^r + (|b|^p)^r)^{\frac{1}{r}} = (|a| + |b|)^p,$$

$$\|u\|_r + \|v\|_r = |a|^p + |b|^p,$$

y además,

$$|a+b|^p \le (|a| + |b|)^p,$$

se obtiene, combinando las desigualdades anteriores, el resultado deseado.

b) Queremos ver que $\overline{c_{00}} = \ell_p$ con $1 \le p < \infty$. Para ello tomamos un elemento de ℓ_p y vemos que existe una sucesión en c_{00} que converge a él. Sea $\xi_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_k^0, ...) \in \ell_p$, es decir, $(\sum |\xi_i^0|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Consideramos la siguiente sucesión de elementos de c_{00} :

$$\xi^1 = (\xi_1^0, 0, 0, ..., 0, ...)$$

$$\xi^2 = (\xi_1^0, \xi_2^0, 0, ..., 0, ...)$$

$$\xi^3 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, ..., 0, ...)$$

$$\cdots$$

$$\xi^n = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, ..., \xi_n^0, 0, ...)$$

Es claro que $(\xi^i) \subset c_{00}$ y que cada ξ^n coincide con ξ_0 en los primeros n términos, mientras que en el resto son ceros. Obviamente hay convergencia coordenada a coordenada. Veamos que, además, se tiene $\xi^n \to \xi_0$ en ℓ_p :

$$\|\xi^n - \xi_0\|_p^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i^0|^p \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Sin embargo c_{00} no es denso en ℓ_∞ pues $\overline{c_{00}} = c_0 \subsetneq \ell_\infty$.

c) Supongamos $p < p'$ y $0 \ne a = (a_n) \in \ell_p$. Es claro que $\frac{|a_n|}{\|a\|_p} \le 1$. Puesto que la función $x \mapsto u^x$ es decreciente si $u \le 1$ se tiene que si $p < p'$ entonces

$$\frac{|a_n|^{p'}}{\|a\|_p^{p'}} \le \frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sumando en $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\frac{\|a\|_{p'}^{p'}}{\|a\|_p^{p'}} \leq \frac{\|a\|_p^p}{\|a\|_p^p} = 1,$$

y por tanto $\|a\|_p' \leq \|a\|_p$, de forma que $\ell_p \subset \ell_{p'}$.

Sea ahora la inclusión canónica $i : \ell_p \hookrightarrow \ell_{p'}$ que a cada $x = (x_n) \in \ell_p$ lo lleva en $i(x) = x \in \ell_{p'}$. Esta aplicación está bien definida por lo que acabamos de demostrar y además es, obviamente, lineal. Por lo inmediatamente anterior, resulta que $\|i\| \leq 1$ pues $\|i(x)\|_{p'} = \|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$. Por otro lado, podemos tomar $x = e_1 = (1, 0, 0, ...)$ de forma que $\|x\|_p = 1$ y $\|i(x)\|_{p'} = \|x\|_{p'} = 1$, con lo que $\|i\| \geq 1$. De esta forma hemos comprobado que $\|i\| = 1$.

Por último, veamos que la cadena de inclusiones de los espacios ℓ_p es estricta. Sea $p \neq p'$, sin perder generalidad podemos suponer $1 < p < p'$ y por tanto $\frac{1}{p'} < \frac{1}{p}$. Consideremos r tal que $\frac{1}{p'} < r < \frac{1}{p}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\xi_n = \frac{1}{n^r}$ y $\xi = (\xi_n)$. Es claro que

$$\|\xi\|_{p'} = \Big(\sum |\frac{1}{n^r}|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

y por tanto $\xi \in \ell_{p'}$. Sin embargo, como $rp < 1$ se tiene

$$\|\xi\|_p = \Big(\sum |\frac{1}{n^r}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \infty,$$

con lo que $\xi \notin \ell_p$ y por tanto $\ell_p \neq \ell_{p'}$.

d) Supongamos $x \in \ell_p$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ y sean s, s' tales que $s > s' > p$, por el apartado anterior se tiene:

$$\|x\|_s \leq \|x\|_{s'} \leq \|x\|_p,$$

con lo que la aplicación $s \mapsto \|x\|_s$ (con $s \geq p$) es decreciente. Además, como $|x_n| \leq \|x\|_s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_s \leq \|x\|_{s'} \leq \|x\|_p$. Por tanto

$$\lim_{s\to\infty} \|x\|_s = \inf \|x\|_s \geq \|x\|_\infty,$$

y tenemos una desigualdad. Para ver la otra, sea $s > 0$, entonces:

$$\|x\|_{s+p}^{s+p} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s |x_n|^p \leq \|x\|_\infty^s \|x\|_p^p,$$

y por tanto

$$\|x\|_{s+p} \leq \|x\|_\infty^{\frac{s}{s+p}} \|x\|_p^{\frac{p}{s+p}}.$$

De esta forma, haciendo $s \to \infty$, obtenemos la otra desigualdad: $\lim_{s\to\infty} \|x\|_{s+p} \leq \|x\|_p$. Así conseguimos ver que $\lim_{s\to\infty} \|x\|_s = \inf_{s\geq p} \|x\|_s = \|x\|_\infty$.

□

Ejercicio 19 *Sea E un espacio normado. Pruébese:*

a) *La aplicación $x \mapsto \|x\|$ es uniformemente continua.*

b) *Toda sucesión de Cauchy en E es un conjunto acotado.*

c) *Toda aplicación lineal T de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ en otro espacio normado F es continua y alcanza su norma, es decir, existe $x_0 \in S = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ tal que $\|T\| = \|T(x_0)\|_F$.*

d) *Dedúzcase del apartado anterior que si F tiene dimensión n, todo isomorfismo algebraico T entre $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y F es un isomorfismo topológico.*

e) *Dedúzcase que toda aplicación lineal de un espacio vectorial normado de dimensión finita en otro espacio vectorial normado es continua. En particular, existen constantes $M, N > 0$ tal que si p es un polinomio de una variable de grado menor o igual que n, $p(x) = a_0x^n + ... + a_{n-1}x + a_n$, se tiene que $|a_0 + a_1| \leq M \sup\{|p(x)| : x \in [-1, 1]\}$ y $\int_{-1}^{3} |p(x)|dx \leq N \max\{|p(x)| : x = 0, 1, ..., n\}$.*

f) *Dedúzcase de* e) *que todas las normas sobre un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, y que con cualquiera de ellas el espacio es completo. Conclúyase que todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado, es cerrado.*

Solución.

a) Sea $T : E \to \mathbb{K}$ la aplicación que a cada $x \in E$ le hace corresponder $T(x) = \|x\|$. Sea $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $\delta = \varepsilon$ de forma que si $\|x - y\| < \delta$ entonces $|T(x) - T(y)| = |\|x\| - \|y\|| < \|x - y\| < \varepsilon$, con lo que T es uniformemente continua.

b) Sea $(x_n) \subset E$ una sucesión de Cauchy. Fijado, por ejemplo, $\varepsilon = 1$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_{n_0}\| < 1$ para todo $n > n_0$. Sea $M = \max\{\|x_{n_0}\| + 1, \|x_1\|, ..., \|x_{n-1}\|\} + 1$. Entonces $(x_n) \subset B(0, M)$ y por tanto la sucesión está acotada.

c) En primer lugar, sabemos que en cualquier espacio de dimensión finita, todas las normas son equivalente. En particular, podemos considerar aquí $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ que también induce la topología usual. Podemos considerar también la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y denotar, para cada $1 \leq i \leq n$, por e_i al vector $(0, ..., 1, ..., 0)$ en el que aparece un 1 en el lugar i-ésimo. Con esto, podemos expresar cada $x \in \mathbb{K}^n$ como $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ (con $x_i \in \mathbb{K}$ para $1 \leq i \leq n$) y remitirnos a sus coordenadas $(x_1, ..., x_n)$.

El conjunto $S = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ es un conjunto compacto en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Sea $x \in S$, por la linealidad de la aplicación se tiene

$$\|T(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_iT(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|T(e_i)\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \{\|T(x_i)\|\} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M < 0.$$

Así, para todo $x \in \mathbb{K}^n$ se cumple que $\|T(\frac{x}{\|x\|}) \leq M\|$ y por tanto $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ con lo que T es continua. Con esto vemos también que $\|T\| \leq M$.

Sea $(x_n) \subset \mathbb{K}^n$. Entonces $(\frac{x_n}{\|x_n\|}) \subset S$ que es compacto, y por tanto existe $x_0 \in S$ punto de acumulación y una subsucesión convergente a x_0. Por la continuidad de la norma se tiene

$$\|T(x_0)\| = \lim_{n_j \to \infty} \|T(\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|})\| = \|T\|,$$

con lo que T alcanza su norma.

d) Tenemos $T : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (F, \|\cdot\|_F)$ isomorfismo. Queremos comprobar que existen constantes $c, C > 0$ tales que $c\|x\|_\infty \leq \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_\infty$. La existencia de C y la segunda desigualdad nos la asegura el apartado anterior.

Para la otra desigualdad, consideramos la aplicación $x \mapsto \|T(x)\|_F$. Esta aplicación es continua y por tanto alcanza su mínimo en la esfera unidad de $\mathbb{K}^n$, es decir, existe $x_0 \in S_\infty$ y un $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \geq \|T(x_0)\|_F = c$ para todo $x \in S_\infty$. Además, la hipótesis de que T es isomorfismo algebraico, nos asegura que $c \neq 0$ y por tanto $\|T(x)\|_F > c > 0$ para todo $x \in S_\infty$.

Sea ahora $y \neq 0$ en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Puesto que $\frac{y}{\|y\|_\infty} = 1$, tenemos que $\|T(\frac{y}{\|y\|_\infty})\|_F \geq c$ y así $\|T(y)\| \geq c\|y\|$ para todo $y \in (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

e) Dada la aplicación lineal $T : E \to F$ podemos factorizarla por medio del isomorfismo $\varphi : E \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ de forma que $s : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to F$ dada por $s = T \circ \varphi^{-1}$ es continua por el apartado c).Además φ es un isomorfismo, con lo que se concluye que T es continua.

En particular, podemos tomar $E_1 = (\mathcal{P}_n, \|p\| = \text{máx}\{|p(x)| : x \in [-1, 1]\})$, $E_2 = (\mathcal{P}_n, \|p\| = \text{máx}\{|p(i)| : i = 0, 1, ..., n\})$, $F = \mathbb{K}$, $T_1(p) = a_0 + a_1$ y $T_2(p) = \int_{-1}^{3} p(x)dx$.

Es claro que E_1 y E_2 son espacios normados y además de dimensión infinita y que F es también espacio normado. Por lo anterior, las aplicaciones lineales T_1 y T_2 son continuas, y por tanto existen constantes $M, N > 0$ tales que

$$|a_0 + a_1| \leq M \sup\{|p(x)| : x \in [-1, 1]\}$$

y

$$\int_{-1}^{3} |p(x)|dx \leq N \, \text{máx}\{|p(x)| : x = 0, 1, ..., n\}.$$

f) Sean E un espacio de dimensión finita y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre él. Consideramos la aplicación identidad $Id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$. Ésta es una aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado. Si ahora consideramos $Id^{-1} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$, también tenemos una aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado, y por el apartado anterior estas aplicaciones son continuas. De esta forma, existen constantes $c, C > 0$ tales que $c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in E$ y por tanto las normas son equivalentes.

Por los apartados anteriores, todo espacio normado de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ que es completo, con lo que todo espacio normado de dimensión finita es completo. De esta forma, si tenemos un subespacio E de dimensión finita en un espacio normado F, consideramos una sucesión convergente $x_n \to x$. Ésta será de Cauchy en E que es completo y por tanto convergente en E, es decir, $x_n \to y$, con $y \in E$. Por la unicidad del límite, $x = y$ y por tanto E es cerrado.

$\square$

Ejercicio 20 *Sea E un espacio vectorial de dimensión infinita. Pruébese:*

a) *Si $(e_i)_{i\in I}$ es una base algebraica de E y para cada $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ se define*

$$\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i| \qquad\qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in I\},$$

pruébese que $\|x\|_1$ y $\|x\|_\infty$ son dos normas no equivalentes sobre E.

b) *Si $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera sobre E, pruébese que existe siempre $T \in E^* \setminus (E, \|\cdot\|)'$.*

Solución.

a) Sea $(e_i)_{i\in I}$ base de E. Es claro que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas. Veamos que no son equivalentes. Sea $id : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_1)$ no es continua, pues para $n \in \mathbb{N}$ sean $\{e_{i_1}, ..., e_{i_n}\} \subset \{e_i\}_{i\in I}$ n elementos distintos y $x = \sum_{k=1}^n x_k e_{i_k}$ con $x_k = 1$ y entonces $\|x\|_\infty = 1$ pero $\|id(x)\|_1 = n$ con lo que id no es continua y por tanto las normas no son equivalentes.

b) Para definir $T \in E^* \setminus (E, \|\cdot\|)'$ basta dar sus imágenes sobre los vectores de una base. Si tenemos $(e_i)_{i\in I}$ base algebraica entonces $(v_i = \frac{e_i}{\|e_i\|})_{i\in I}$ es también base algebraica y para cada $i \in I$ se tiene $\|v_i\| = 1$.

   Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (v_i)_{i\in I}$. Definimos $T \in E^*$ tal que $T(v_n) = n$ y $T(v_i) = 0$ si $v_i \notin (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta aplicación es lineal y sin embargo no es continua ya que $T(B(E)) \supset \{T(v_n) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, con lo que $T \in E^* \setminus (E, \|\cdot\|)'$.

$\square$

Ejercicio 21 *Sea $E_p := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, $p = 1, 2, \infty$, $M_p := \{(x, y) \in E_p : x - 2y = 0\}$ y $T_0 : M \to \mathbb{R}$ la forma lineal $M_p \ni (x, y) \to T_0(x, y) = x$.*

a) *Calcúlese la norma de T_0 para los distintos valores de p considerados.*

b) *Encuéntrese todas las extensiones de T_0 a E_p que conservan la norma, para los valores de p considerados.*

Solución.

a) Veamos cuánto vale $\|T_0\|$ con $(x,y) \in M_p$. Recordemos la expresión mediante la cual podemos calcular la norma de un operador:

$$\|T_0\| = \sup\{|T_0(x,y)| : \|(x,y)\|_p = 1\} = \sup\{|x| : \|(x,y)\|_p = 1\}.$$

Ahora estudiemos caso por caso:

$p=1$ $\|T_0\| = \sup\{|x| : |x|+|y| = 1\}$. Puesto que (x,y) debe cumplir $x-2y=0$, obtenemos:

$$|x|+|y| = 1 \Rightarrow |x| + \frac{1}{2}|x| = 1 \Rightarrow |x| = \frac{2}{3},$$

y por tanto $\|T_0\| = \frac{2}{3}$.

$p=2$ $\|T_0\| = \sup\{|x| : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ y por tanto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 1 \Rightarrow |x| = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

con lo que $\|T_0\| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$p=\infty$ $\|T_0\| = \sup\{|x| : \sup\{|x|,|y|\} = 1\}$ y en este caso:

$$\sup\{|x|,|y|\} = 1 \Rightarrow \sup\{|x|, \frac{1}{2}|x|\} = 1 \Rightarrow |x| = 1,$$

y por consiguiente se tiene $\|T_0\| = 1$.

b) Buscamos ahora una aplicación lineal T de forma que $T|_{M_p} = T_0$ y $\|T\| = \|T_0\|$. Puesto que la aplicación T que buscamos se puede representar como $T(x,y) = ax+by$ para ciertos $a,b \in \mathbb{R}$, identificaremos a T con el par $(a,b) \in (E_p)'$. Es común a todos los casos la condición de que la restricción de T a M_p debe ser T_0, entonces se debe cumplir que si $(x,y) \in M_p$, entonces $T(x,y) = T_0(x,y)$, por tanto $x = ax+by = ax+\frac{1}{2}bx = (a+\frac{1}{2}b)x$ con lo que $a+\frac{1}{2}b = 1$ es la primera relación que buscamos.

Ahora estudiemos la restricción que nos da la conservación de la norma en los distintos casos de p considerados y resolvamos el sistema de ecuaciones que nos dará los valores buscados de (a,b). Puesto que hemos identificado las extensiones T de T_0 con los respectivos pares (a,b), debemos intersecar la recta afín obtenida con la bola (del radio correspondiente) del espacio dual correspondiente.

$p=1$ Se tiene que $(E_1)' = E_\infty$ y por tanto tenemos que $\|(a,b)\|_\infty = \frac{2}{3}$, con lo que el sistema que debemos resolver es

$$\begin{cases} \sup\{|a|,|b|\} = \frac{2}{3} \\ \\ a+\frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $(a, b) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Por tanto, el operador extensión de T_0 que buscábamos es $T(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y$.

$p = 2$ Ahora tenemos que $(E_2)' = E_2$ y entonces $\|(a, b)\|_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Con esto, el sistema que hay que resolver es

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ a + \frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$$

y la solución es $(a, b) = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ y por tanto $T(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y$.

$p = \infty$ En el último caso, $(E_p)' = E_1$ y la condición sobre (a, b) que nos da la conservación de la norma es $\|(a, b)\|_1 = 1$ con lo que el sistema a resolver es

$$\begin{cases} |a| + |b| = 1 \\ \\ a + \frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$$

y la única solución al sistema es $(a, b) = (1, 0)$ por lo que la única extensión solución es $T(x, y) = x$.

$\square$

Ejercicio 22 *Para cada sucesión $x = (x_n)$ acotada de números reales, pongamos $p(x) := \limsup_{n\to\infty} x_n$.*

a) *Pruébese que p es una subnorma sobre ℓ_∞ real, es decir, es una función subaditiva que cumple $p(rx) = rx$ para todo $r \geq 0$.*

b) *Sea c el subespacio de ℓ_∞ de las sucesiones convergentes, y consideremos el funcional $T_0 \in c^*$ dado por $T_0(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$. Pruébese que $T_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in c$.*

c) *Aplíquese el teorema de Hahn-Banach para probar que existe $T \in (\ell_\infty)'$ tal que $\|T\| = 1$ y $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq T(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$ para todo $x \in \ell_\infty$. En particular, si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $T(x) \geq 0$.*

Solución.

a) Comprobemos que $p(x)$ es una subnorma:

   i) Sean $x, y \in \ell_\infty$, esto es $\sup\{|x_n|\} < \infty$, $\sup\{|y_n|\} < \infty$. Entonces:

   $$p(x + y) = \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n = p(x) + p(y).$$

   ii) Sea $x \in \ell_\infty$ y $r \in \mathbb{R}_+$.Entonces:

   $$p(rx) = \limsup(rx_n) = r \limsup x_n = rp(x).$$

b) Veamos ahora que $T_0(x) \leq p(x)$ para cada $x \in c$.

$$T_0(x) = \lim x_n \leq \limsup x_n = p(x),$$

y de hecho $T_0(x) = p(x)$ para $x \in c$.

c) Estamos en las hipótesis del teorema de Hahn-Banach en el espacio ℓ_∞ con la subnorma $p(x) = \limsup x_n$ y $T_0(x) = \lim x_n$ en $c \subset \ell_\infty$ con $T_0 \in c^*$ y $T_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in c$. Entonces existe $T \in \ell_\infty^*$ tal que $T|_c = T_0$ y $T(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \ell_\infty$.

Demostremos que T es continua y que $\|T\| = 1$. Por una parte se tiene que

$$|T_0(x)| = |\lim x_n| \leq |\limsup x_n| \leq \|x\|_\infty,$$

con lo que $\|T_0\| \leq 1$. Tomando la sucesión $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|x\|_\infty = 1$ y $|T_0(x)| = |\lim x_n| = 1$ y por tanto $\|T_0\| = 1$. De esta forma

$$|T(x)| \leq |p(x)| = |\limsup x_n| \leq \|x\|_\infty$$

y por tanto $\|T\| \leq 1$. Por otro lado, al ser T extensión de T_0 entonces $\|T\| \geq 1$. Así $\|T\| = 1$.

Además T es continua pues $|T(x)| \leq 1\|x\|_\infty$.

El teorema de Hahn-Banach nos da la condición $T(x) \leq \limsup x_n$. Ahora:

$$-T(-x) \geq -p(-x) = -\limsup(-x_n) = \liminf x_n$$

y por tanto $\liminf x_n \leq T(x) \leq \limsup x_n$.

En particular, si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\liminf x_n \geq 0$ y por tanto $T(x) \geq 0$.

□

Ejercicio 23 *Sea M el subespacio vectorial de ℓ_1 formado por las sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ tales que $x_{2k} = 0$ para $k = 1, 2, ...$ y consideramos la forma lineal sobre M definida por $T(x) = x_1 + x_3$.*

a) *Calcúlese la norma de T_0 como elemento de M'.*

b) *Determínese el conjunto $\mathcal{E} \subset (\ell_1)'$ de todas las extensiones lineales de T_0 a ℓ_1 que tienen la misma norma de T_0.*

c) *Pruébese que $\mathcal{E}$ es un conjunto ω^*-secuencialmente cerrado de $(\ell_1)'$.*

Solución.

a) Sea $x \in M$, entonces:

$$|T_0(x)| = |x_1 + x_3| \leq |x_1| + |x_3| \leq \sum_{i=1}^{\infty} = \|x\|_1.$$

Así $\|T_0\| \leq 1$. Veamos ahora que existe un elemento en el cual T_0 alcanza su norma. Tomamos $x = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, ...)$, entonces $\|x\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ y $|T_0(x)| = 1$, por tanto $\|T_0\| = 1$.

b) Veamos las extensiones de T_0 que conservan la norma. Identifiquemos $(\ell_1)' = \ell_\infty$ y busquemos $a = (a_n) \in \ell_\infty$ tal que $T_a|_M = T_0$, donde

$$T_a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...$$

Para que $T_a|_M = T_0$, debe ser $a_1 = 1$ y $a_3 = 1$, a_{2k} libres para todo $k \geq 1$ y $a_{2k+1} = 0$ para todo $k \geq 2$. Ahora, de todas las extensiones, veamos cuáles son las que conservan la norma: como $\|T_a\| = \|a\|_\infty$, debe ser $\|a\|_\infty = 1$. Por tanto $|a_{2k}| \leq 1$ para todo $k \geq 1$.

El conjunto $\mathcal{E} \subset (\ell_1)' = \ell_\infty$ de todas las extensiones lineales que tienen la la misma norma es:

$$\mathcal{E} = \{a = (a_n) \in \ell_\infty : a_{2k+1} = 0 \ \forall k \geq 2, \ a_1 = a_3 = 1, \ |a_{2k}| \leq 1 \ \forall k \geq 1\}.$$

c) Veamos que $\mathcal{E}$ es un subconjunto ω^*-secuencialmente cerrado de $(\ell_1)'$. Tomemos una sucesión $(a(n)) \subset \mathcal{E}$ de forma que $T_{a(n)} \to T_a$ en ω^*. Veamos que $a \in \mathcal{E}$.

Por definición de ω^* se tiene $T_{a(n)}(x) \to T_a(x)$ para todo $x \in \ell_1$. En particular, si e_i denota el vector nulo salvo un 1 en la coordenada i-ésima, consideramos e_1 y e_3, tenemos:

$$T_{a(n)}(e_1) = 1 \to T_a(e_1) \Rightarrow a_1 = 1,$$
$$T_{a(n)}(e_3) = 1 \to T_a(e_3) \Rightarrow a_3 = 1.$$

Si ahora consideramos e_{2k+1}, entonces:

$$T_{a(n)}(e_{2k+1}) = 0 \to T_a(e_{2k+1}) \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \ \forall k \geq 2.$$

Y por último, si consideramos e_{2k} para $k \geq 1$, se tiene una sucesión de términos tales que $|T_{a(2k)}(e_{2k})| \leq 1$ y por tanto $|a_{2k}| \leq 1$. De esta forma $a \in \mathcal{E}$.

□

Ejercicio 24 *Sea $E = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la forma lineal x'_n sobre E dada por*

$$x'_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \forall x = (x_k) \in E.$$

a) *Pruébese que* $x'_n \in E'$. *Calcúlese* $\|x'_n\|$.

b) *Pruébese que* (x'_n) *está puntualmente acotada (de hecho existe* $\lim_{n\to\infty} x'_n(x)$ *para cada* $x \in E$*). Dedúzcase de* a) *que* E *es de Primera Categoría de Baire.*

c) *Pruébese directamente que* $D := \{x \in E : |x'_n(x)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto cerrado con interior vacío y cumple* $E = \cup_{n=1}^{\infty} nD$.

Solución.

a) Veamos que la forma lineal es continua:

$$|x'_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq n\|x\|_\infty.$$

Entonces $\|x'_n\| \leq n$ y x'_n continua. Sea $x = (1, ..., 1, 0, ...) \in c_{00}$ con las n primeras entradas igual a 1 y el resto 0. Entonces $\|x\|_\infty = 1$ y además $|x'_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} 1| = n$ y por tanto $\|x'_n\| \geq 1$. Así $\|x'_n\| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea la familia $\mathcal{F} = \{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada x'_n es la forma lineal definida con anterioridad. Veamos que esta familia está puntualmente acotada, es decir, que para cada $x \in E$ el conjunto $\mathcal{F}(x) = \{x'_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Sea $x = (x_k) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_0}, 0, ...)$ fijo, entonces:

$$x'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k & \text{si } n \leq n_0 \\ \sum_{k=1}^{n_0} x_k & \text{si } n_0 < n \end{cases}$$

Es decir, a partir de $n > n_0$, la suma es la misma. Tenemos una cantidad de sumandos finita, y por tanto $|x'_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n_0} |x_k|$ y entonces $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada.

Aplicando el principio de acotación uniforme, tomando como $A = \{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x'_n(x)\| < \infty\}$, se tiene $A = E$, pero no existe $M > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x'_n\| = M < \infty$, pues $\|x'_n\| = n \to \infty$ si $n \to \infty$. Por tanto A es de primera categoría de Baire.

c) Sea $D = \{x \in E : |x'_n(x)| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que D es cerrado. Sea $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E$ tal que $x_k \to x$. Comprobemos entonces que $x \in D$ o, equivalentemente si $|x'_n(x)| \leq 1$.

Sea $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $x_k \to x$ entonces existe k_0 tal que $\|x_k - x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{n}$ y por tanto:

$$|x'_n(x_k) - x'_n(x)| = |x'_n(x_k - x)| \leq n\|x_k - x\|_\infty \leq \varepsilon$$

y en consecuencia:

$$|x'_n(x)| = |x'_n(x) - x'_n(x_k) + x'_n(x_k)| \leq |x'_n(x) - x'_n(x_k)| + |x'_n(x_k)| \leq \varepsilon + 1.$$

Esto es así para todo $\varepsilon > 0$, con lo que $|x'_n(x)| \leq 1$ y entonces $x \in D$.

Ahora veamos que tiene interior vacío. Supongamos $D^\circ \neq \emptyset$. Entonces hay un $x \in D$ tal que existe una bola $U^x = \{y \in E : \|x - y\|_\infty \leq \delta\} \subset D$ entorno con $x \in U^x \subset D$. Veamos que existe $y \in U^x$ tal que $y \notin D$.

Sea $x = (x_1, ..., x_{n_0}, 0, ...)$, entonces $y_k = (x_1, ..., x_{n_0}, \frac{\delta}{2}, \overset{k)}{\ldots}, \frac{\delta}{2}, 0, ...) \in U^x$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo:

$$|x'_{n_0+k}(y_k)| \leq |x'_n(x)| + \frac{\delta}{2} + ... + \frac{\delta}{2} = |x'_n(x)| + \frac{k\delta}{2},$$

y por tanto $|x'_{n_0+k}(y_k)| > 1$ para un k suficientemente grande, lo que es una contradicción.

Como consecuencia, se tiene que D es un conjunto diseminado, pues $(\overline{D})^\circ = \emptyset$. Además, $E = \cup_{n=1}^\infty nD$. El contenido $E \supset \cup_{n=1}^\infty nD$ es obvio. Para ver el otro contenido, sea $x = (x_n) \in E$, existe n_0 tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$ y por tanto $x \in mD$ para $m = \sum_{n=1}^{n_0} |x_n|$.

$\square$