¿QUÉ ES EL CAOS CUÁNTICO?

Armando Relaño[1]

[1]Departamento de Estructura de la Materia, Física Térmica y Electrónica
Universidad Complutense de Madrid

20 septiembre 2018

Mecánica Clásica: $\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N) \longrightarrow \begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$

Caos debido a ecuaciones diferenciales no lineales

Mecánica Clásica: $\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N) \longrightarrow \begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$

Caos debido a ecuaciones diferenciales no lineales

Mecánica Cuántica: $\longrightarrow i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \left|\Psi\right\rangle = \mathcal{H} \left|\Psi\right\rangle$

La ecuación de Schrödinger es lineal $\longrightarrow$ **No genera caos**

$$\left|\langle\Psi(0)|\Phi(0)\rangle\right|^2 = \left|\langle\Psi(t)|\Phi(t)\rangle\right|^2 \ \forall t$$

- N constantes de movimiento: $\{\mathcal{H}, F_i\} = 0, \; i = 1, \ldots, N$.
- En involución $\{F_i, F_j\} = 0 \; \forall i, j$.
- Funcionalmente independientes.

$$\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N) \xrightarrow{(p,q) \rightarrow (I,\phi)} \mathcal{H}(I_1, \ldots, I_N)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{I}_i & = & 0 \\ \dot{\phi}_i & = & \omega_i(I_1, \ldots, I_N) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Movimiento multiperiódico} \\ \downarrow \\ \text{Trayectorias en un toro} \end{array}$$

Ruptura de integrabilidad $\longrightarrow$ Caos (teorema KAM)

- N constantes de movimiento: $[\mathcal{H}, F_i] = 0, \; i = 1, \ldots, N$.
- En involución $\{F_i, F_j\} = 0 \; \forall i, j$.
- Funcionalmente independientes.

$$\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N) \xrightarrow{(p,q)\rightarrow(I,\phi)} \mathcal{H}(I_1, \ldots, I_N)$$

$$\left.\begin{array}{rcc} \dot{I}_i & = & 0 \\ \dot{\phi}_i & = & \omega_i(I_1, \ldots, I_N) \end{array}\right\}$$

Movimiento multiperiódico

$\downarrow$

Trayectorias en un toro

Ruptura de integrabilidad $\longrightarrow$ Caos (teorema KAM)

- N constantes de movimiento: $[\mathcal{H}, F_i] = 0, \; i = 1, \ldots, N$.
- Conmutan entre sí $[F_i, F_j] = 0 \; \forall i, j$.
- Funcionalmente independientes.

$$\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N) \xrightarrow{(p,q)\rightarrow(I,\phi)} \mathcal{H}(I_1, \ldots, I_N)$$

$$\left. \begin{array}{rcl} \dot{I}_i & = & 0 \\ \dot{\phi}_i & = & \omega_i(I_1, \ldots, I_N) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Movimiento multiperiódico} \\ \downarrow \\ \text{Trayectorias en un toro} \end{array}$$

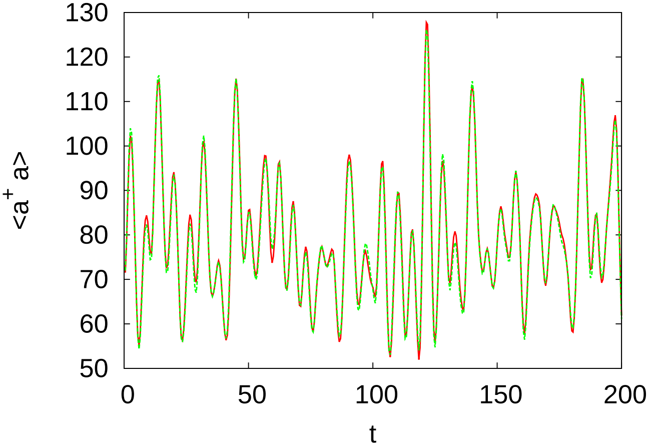
Ruptura de integrabilidad $\longrightarrow$ Caos (teorema KAM)

- N constantes de movimiento: $[\mathcal{H}, F_i] = 0, \; i = 1, \ldots, N$.
- Conmutan entre sí $[F_i, F_j] = 0 \; \forall i, j$.
- Todas las constantes de movimiento son funciones de un operador general $\mathcal{O}$.

¿¿¿¿????

Mecánica cuántica

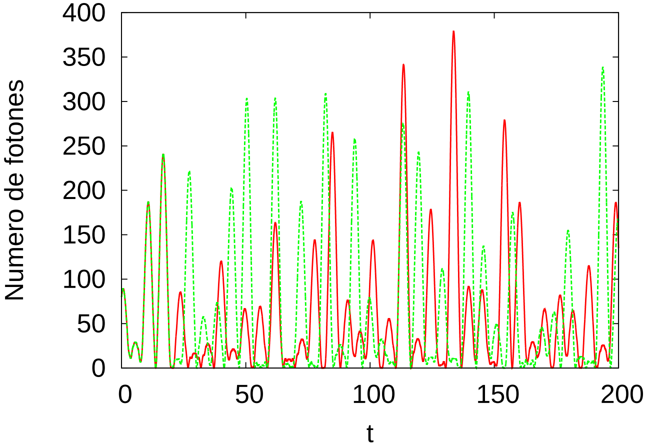
$$H = \omega a^\dagger a + \omega_o J_z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \left[\left(a + a^\dagger \right) (J_+ + J_-) \right]$$



¡Pero tiene que haber caos!

Mecánica clásica

$$H = \frac{\omega}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{\omega_o}{2}\left(p_y^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\lambda x y \sqrt{1 - \left(p_y^2 + y^2\right)}$$



Evolución temporal del valor esperado

- Espectro del Hamiltoniano: $\mathcal{H} \left| \phi_n \right\rangle = E_n \left| \phi_n \right\rangle$.
- Condición inicial $\left| \Psi(0) \right\rangle = \sum_n C_n \left| \phi_n \right\rangle$.

$$\langle M \rangle = \sum_{i,j} C_j^* C_i \underbrace{e^{-i\left(E_i - E_j\right)t/\hbar}}_{\text{Energías}} \underbrace{\left\langle \phi_j \right| M \left| \phi_i \right\rangle}_{\text{Funciones de onda}}$$

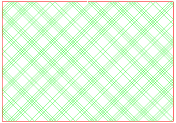
Cuantizando sistemas integrables: espectro

Reglas SWI: mecánica cuántica antigua

- Hamiltoniano clásico integrable: $\mathcal{H}(I_1, \ldots, I_N)$.
- Cuantizamos las acciones: $I_i = 2\pi\hbar n_i \longrightarrow$ Primera aproximación al espectro: $E_{n_1,\ldots,n_N} = \mathcal{H}(2\pi\hbar n_1, \ldots, 2\pi\hbar n_N)$.

La particular geometría de los sistemas clásicamente integrables se manifiesta en la forma del espectro

Ejemplo: billar rectangular



- Dos constantes de movimiento, p_x^2 y $p_y^2 \longrightarrow$ dos números cuánticos, n_x y n_y,

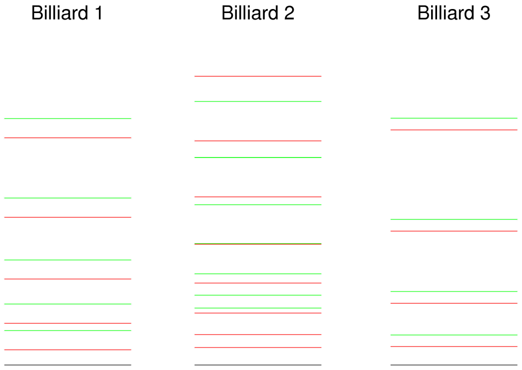
$$E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{b} \right)^2 \right].$$

- Fijando n_x (autoestados correspondientes a $p_x^2 = C$), secuencia ordenada de niveles $E \sim n_y^2$.
- Espectro completo: mezcla aleatoria de todas estas secuencias.

Billar rectangular

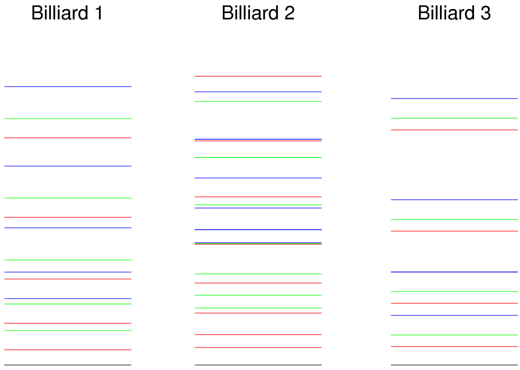
$n_x = 1$

Billar rectangular

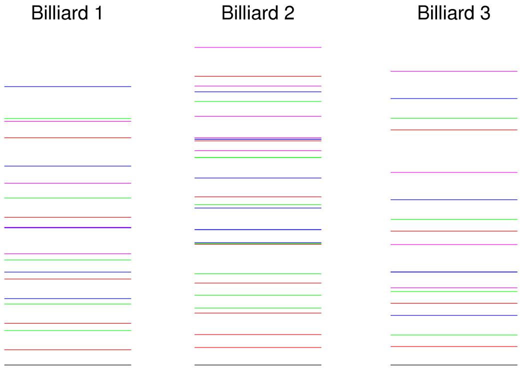


$n_x = 1$ $n_x = 2$

Billar rectangular

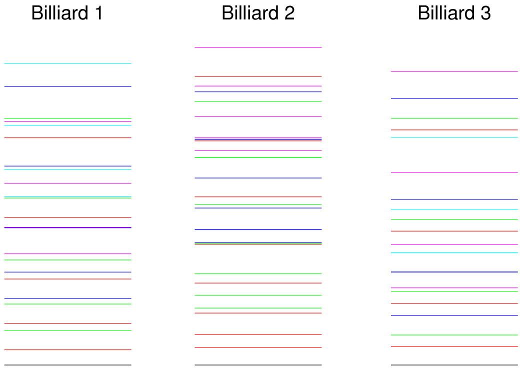


$n_x = 1$ $n_x = 2$ $n_x = 3$

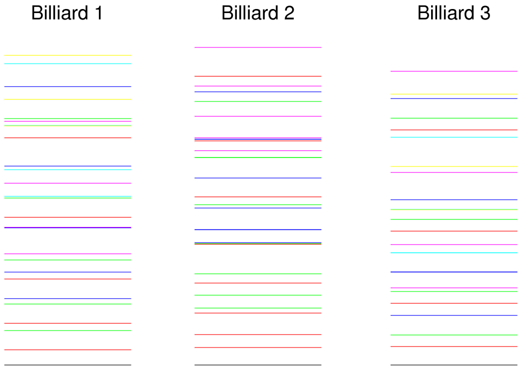


$n_x = 1$ $n_x = 2$ $n_x = 3$ $n_x = 4$

Billar rectangular

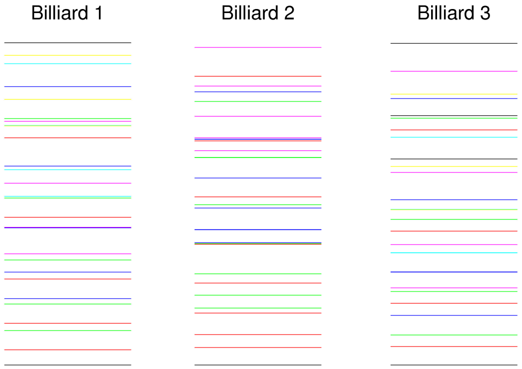


$n_x = 1$ $n_x = 2$ $n_x = 3$ $n_x = 4$ $n_x = 5$



$n_x = 1$ $n_x = 2$ $n_x = 3$ $n_x = 4$ $n_x = 5$ $n_x = 6$

Billar rectangular



$n_x = 1$ $n_x = 2$ $n_x = 3$ $n_x = 4$ $n_x = 5$ $n_x = 6$ $n_x = 7$

Propiedades estadísticas del espectro

- Parte suave del espectro:
  - Forma funcional del Hamiltoniano: $\mathcal{H}\left(I_1, \ldots, I_N\right)$.
  - Diferente para cada sistema físico.
- Parte aleatoria del espectro:
  - Consecuencia de mezclar diferentes secuencias ordenadas, correspondientes a la cuantización de cada acción $I_j = 2\pi\hbar n_j$.
  - **Universal:** Característica de todos los sistemas integrables.

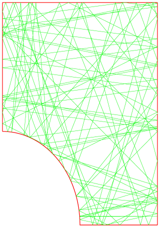
- Parte suave del espectro:
  - Forma funcional del Hamiltoniano: $\mathcal{H}\left(I_1, \ldots, I_N\right)$.
  - Diferente para cada sistema físico.
- Parte aleatoria del espectro:
  - Consecuencia de mezclar diferentes secuencias ordenadas, correspondientes a la cuantización de cada acción $I_j = 2\pi\hbar n_j$.
  - **Universal:** Característica de todos los sistemas integrables.

Fluctuaciones en el espectro

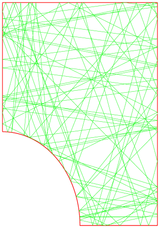
La distancia s entre cada dos niveles consecutivos $s_i = E_{i+1} - E_i$, normalizada a uno $\langle s \rangle = 1$, sigue una distribución de Poisson $P(s) = \exp(-s)$ para todos los sistemas integrables de más de un grado de libertad.

M. V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 375 (1977).

- Un sistema no integrable no tiene bastantes constantes de movimiento: $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(I_1, \ldots, I_N)$.
- No puede cuantizarse de la misma manera: $E \neq \mathcal{H}(2\pi\hbar n_1, \ldots, 2\pi\hbar n_N)$.
- El espectro no es el resultado de mezclar secuencias independientes $\longrightarrow$ Correlaciones entre niveles.



- Un sistema no integrable no tiene bastantes constantes de movimiento: $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}\left(I_1, \ldots, I_N\right)$.
- No puede cuantizarse de la misma manera: $E \neq \mathcal{H}\left(2\pi\hbar n_1, \ldots, 2\pi\hbar n_N\right)$.
- El espectro no es el resultado de mezclar secuencias independientes $\longrightarrow$ Correlaciones entre niveles.

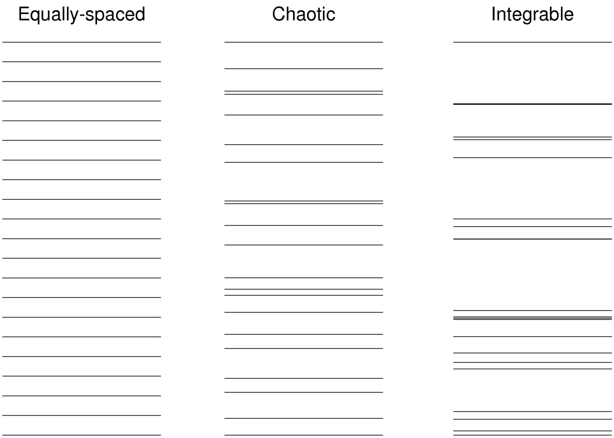


FLUCTUACIONES EN EL ESPECTRO: CONJETURA BGS

La distancia s entre cada dos niveles consecutivos $s_i = E_{i+1} - E_i$, normalizada a uno $\langle s \rangle = 1$, sigue una distribución de Wigner $P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$ para todos los sistemas clásicamente ergódicos.

O. Bohigas, M. J. Gianonni y C. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).

Comportamiento cualitativo



Perturbamos un sistema integrable: $\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_0}_{\text{Integrable}} + \underbrace{\mathcal{V}}_{\text{Caótico}}$

- Representación matricial.
- Base integrable: $\mathcal{H}_0 \left|\Psi_i\right\rangle = E_i^0 \left|\Psi_i\right\rangle$:

$$\mathcal{H}_{ij} = \left\langle \Psi_i \right| \mathcal{H}_0 \left| \Psi_j \right\rangle + \left\langle \Psi_i \right| \mathcal{V} \left| \Psi_j \right\rangle$$

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} E_1^0 + V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & E_2^0 + V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & E_n^0 + V_{nn} \end{pmatrix}$$

- El espectro se obtiene diagonalizando H_{ij}. Depende de cómo son los elementos V_{ij}.

Teoría de matrices aleatorias (TMA)

- Modelo estadístico para interacciones complejas. Desarrollado para Física Nuclear.
- Representación matricial con elementos aleatorios.
- Físicamente, todas las interacciones son igualmente probables.

Teoría de matrices aleatorias (TMA)

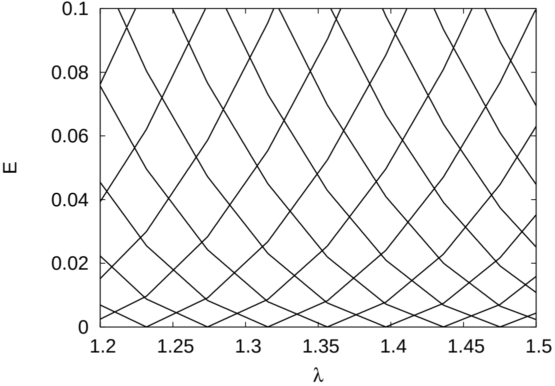
- Modelo estadístico para interacciones complejas. Desarrollado para Física Nuclear.
- Representación matricial con elementos aleatorios.
- Físicamente, todas las interacciones son igualmente probables.

La TMA genera espectros con distribución de Wigner

Los sistemas cuánticos cuya dinámica clásica es ergódica se comportan como si sus interacciones fueran muy complejas

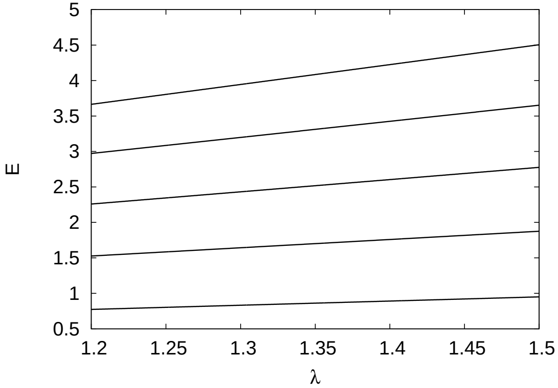
Cambio de los niveles al modificar λ:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \left[\left(a^\dagger J_- + a J_+ \right) \right]$$



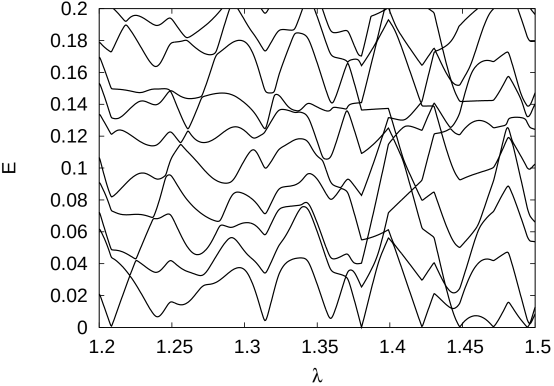
Lo que un sistema "ve":

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \left[\left(a^\dagger J_- + a J_+ \right) \right]$$



Cambio de niveles al modificar λ:

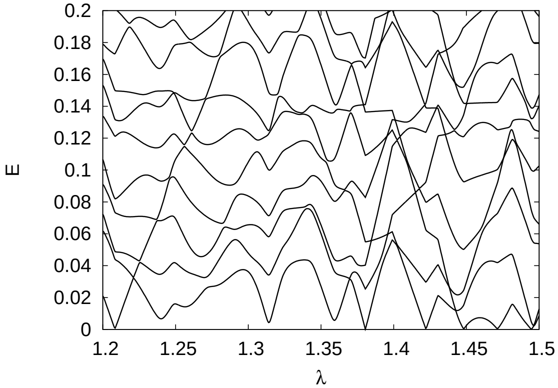
$$H = \omega a^\dagger a + \omega_o J_z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \left[\left(a + a^\dagger \right) \left(J_+ + J_- \right) \right]$$



Dinámica en un sistema caótico: anticruces

Cambio de niveles al modificar λ:

$$H = \omega a^{\dagger} a + \omega_o J_z + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \left[\left(a + a^{\dagger} \right) \left(J_+ + J_- \right) \right]$$



Las transiciones en un proceso $\lambda_i \xrightarrow{\lambda(t)} \lambda_f$ son más probables

Evolución temporal del valor esperado

- Condición inicial $|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |\phi_n\rangle$:

$$\langle M \rangle = \sum_{i,j} C_j^* C_i \underbrace{e^{-i(E_i - E_j)t/\hbar}}_{\text{Energías}} \underbrace{\langle \phi_j | M | \phi_i \rangle}_{\text{Funciones de onda}}$$

Evolución temporal del valor esperado

- Condición inicial $|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |\phi_n\rangle$:

$$\langle M \rangle = \sum_{i,j} C_j^* C_i \underbrace{e^{-i\left(E_i - E_j\right)t/\hbar}}_{\text{Energías}} \underbrace{\langle \phi_j | M | \phi_i \rangle}_{\text{Funciones de onda}}$$

- Medida física $\overline{\langle M \rangle} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\, M(t)$.

$$\overline{\langle M \rangle} = \sum_i |C_i|^2 \langle \phi_i | M | \phi_i \rangle$$

Cuánticamente, el sistema no olvida su condición inicial

Funciones de onda y observables físicos

Aunque no es posible universalizar, pues podemos “inventarnos” observables, M, con cualquier comportamiento... La representación de $\langle\phi_i| M |\phi_i\rangle$ suele ser irregular si el sistema es caótico.

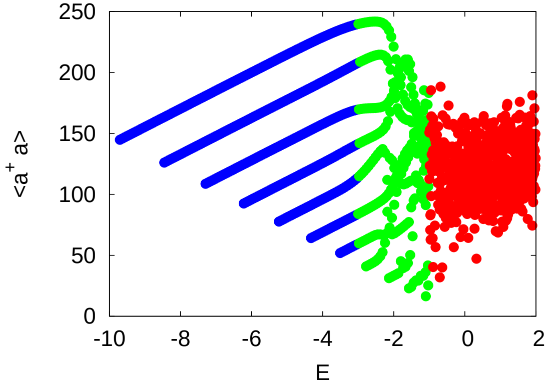
A. Peres, Phys. Rev. Lett. **53**, 1711 (1984).

Funciones de onda y observables físicos

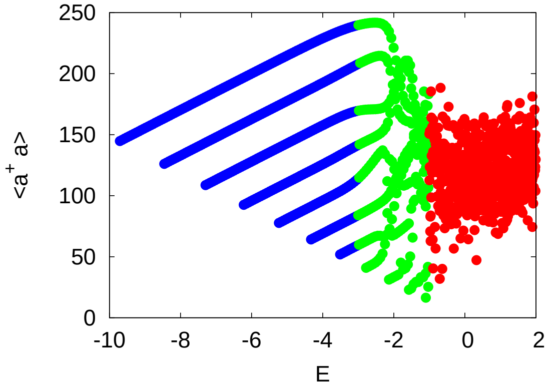
Aunque no es posible universalizar, pues podemos “inventarnos” observables, M, con cualquier comportamiento... La representación de $\langle \phi_i | M | \phi_i \rangle$ suele ser irregular si el sistema es caótico.

A. Peres, Phys. Rev. Lett. **53**, 1711 (1984).

Modelo de Dicke: $\omega = \omega_0 = 1$, $\lambda = 2.2$, $N = 10$.



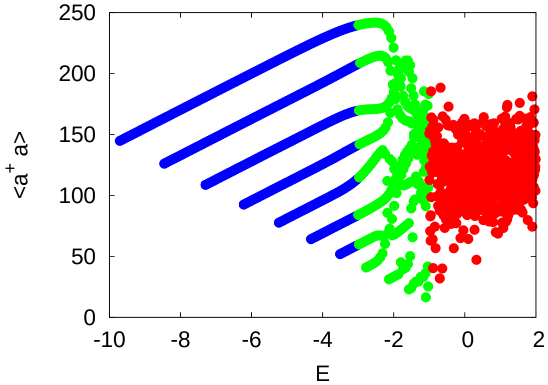
¿Memoria cuántica de la condición inicial?



$$\overline{\langle a^\dagger a \rangle} = \sum_i |C_i|^2 \langle \phi_i | a^\dagger a | \phi_i \rangle \longrightarrow$$

Sistema no caótico, los detalles de la condición inicial importan

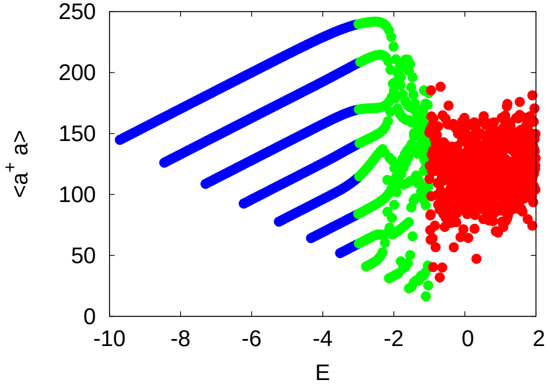
¿Memoria cuántica de la condición inicial?



$$\overline{\langle a^\dagger a \rangle} = \sum_i |C_i|^2 \langle \phi_i | a^\dagger a | \phi_i \rangle \longrightarrow$$

Sistema caótico, los detalles de la condición inicial **no** importan

¿Memoria cuántica de la condición inicial?

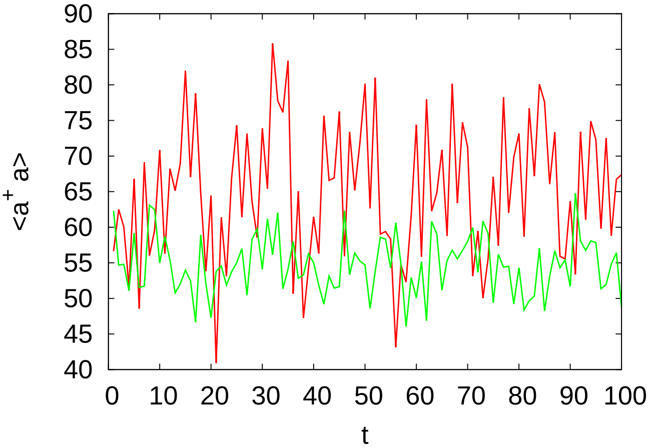


Eigenstate Thermalization Hypothesis

En un sistema cuántico caótico, los detalles sobre la condición inicial, $|C_i|^2$, son irrelevantes termodinámicamente *debido a la aleatoriedad de* $\langle\phi_i| M |\phi_i\rangle$.

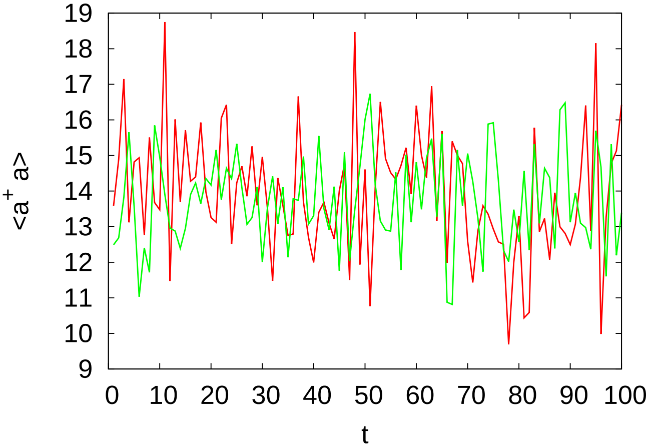
M. Srednicki, Phys. Rev. E **50**, 888 (1994).

Dos condiciones iniciales distintas en la zona integrable



Trabajo en progreso. A. R. y C. Morales Lóbez.

Las mismas dos condiciones iniciales en la zona caótica



Trabajo en progreso. A. R. y C. Morales Lóbez.

- El caos clásico es debido a sus ecuaciones diferenciales no lineales. La linealidad de la ecuación de Schrödinger impide el caos en los mismos términos.
    - Fijado el Hamiltoniano, la dinámica siempre conserva información sobre la condición inicial.
- El espectro tiene propiedades estadísticas específicas en los sistemas caóticos.
    - Las transiciones entre niveles son más probables si hay caos.
    - La información sobre el estado inicial se borra más fácilmente si cambio el Hamiltoniano.
- En los autoestados de los sistemas caóticos, los observables fluctúan aleatoriamente.
    - La información contenida en el estado inicial es irrelevante.